$\boxed{16}$ ［大阪大・理］

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

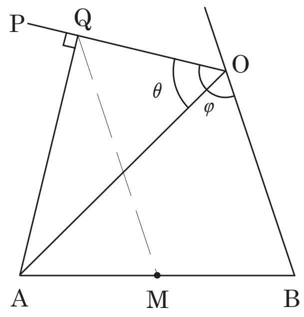
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。

$\boxed{17}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

xyz 空間で O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(3,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 4)$，E$(3,\ 0,\ 4)$，F$(3,\ 2,\ 4)$，G$(0,\ 2,\ 4)$ を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P, 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく。ただし，$0<s<1$, $0<t<1$ とする。D を通り，O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・理］



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を φ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\ \cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から，

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで，M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\vec{b}$$

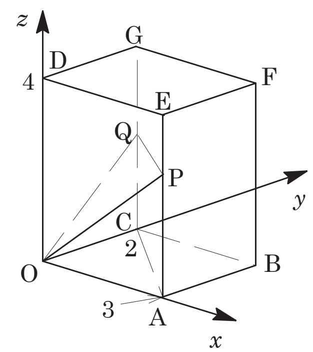
以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

［解 説］

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］



AP : PE $= s : 1-s$，CB : BG $= t : 1-t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OE}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$= s(3,\ 0,\ 4) + (1-s)(3,\ 0,\ 0)$$
$$= (3,\ 0,\ 4s)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$= t(0,\ 2,\ 4) + (1-t)(0,\ 2,\ 0)$$
$$= (0,\ 2,\ 4t)$$

平面 OPQ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3a + 4sc = 0\ ,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2b + 4tc = 0$$

これより，$a = -\dfrac{4}{3}sc$，$b = -2tc$ となり，$\vec{n} = \left(-\dfrac{4}{3}sc,\ -2tc,\ c\right) = -\dfrac{c}{3}(4s,\ 6t,\ -3)$

すると，点 D を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ直線は，k を実数として，

$$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 4) + k(4s,\ 6t,\ -3) = (4sk,\ 6tk,\ 4-3k)$$

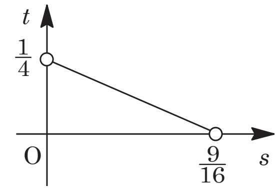
xy 平面との交点は，$z = 4-3k = 0$ から $k = \dfrac{4}{3}$ となり，$(x,\ y,\ z) = \left(\dfrac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right)$

さて，線分 AC 上(両端を含む)の点は，$0 \leqq l \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z) = l(3,\ 0,\ 0) + (1-l)(0,\ 2,\ 0) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$$

ここで，条件より，$\left(\dfrac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$ となり，

$$\frac{16}{3}s = 3l \cdots\cdots\cdots ①,\ 8t = 2-2l \cdots\cdots\cdots ②$$



①②より，$\dfrac{32}{5}s + 24t = 6$ となり，$16s + 36t = 9$

また，$0 \leqq l \leqq 1$ から $0 \leqq 8t \leqq 2$ となり，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}$

さらに，$0 < t < 1$，$0 < s < 1$ と合わせると，$0 < t < \dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの頻出題で，計算量も少なめです。