13　　［神戸大］

a を $0 \leqq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=-\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2)　a が $0 \leqq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ。

(3)　図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。

14　　［筑波大］

xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1)　D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leqq t \leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2)　平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ を求めよ。

(3)　E の体積 V を求めよ。

15　　［東京工大］

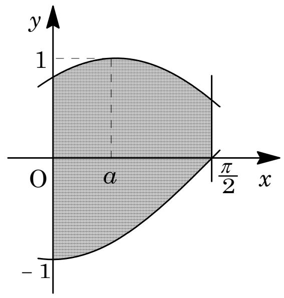
xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を l とする。

(1)　l 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2)　不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{13}$ ［神戸大］

(1)　2 直線 $x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$，2 曲線 $y=\cos(x-a)$ と $y=-\cos x$ によって囲まれる図形 G の面積 S は,



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(x-a)+\cos x\}dx$$

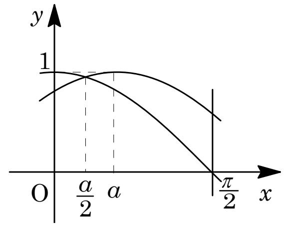
$$=\Big[\sin(x-a)+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\sin(-a)+1=\cos a+\sin a+1$$

(2)　(1)から，$S=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

そこで，$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq a+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ から，$a+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $a=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる。

(3)　まず，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=-\cos x$ を x 軸に関して折り返し, x 軸の上側に対称移動すると，曲線 $y=\cos x$ となる。そして，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=\cos x$ の交点は,



$$\cos(x-a)=\cos x\,,\quad x-a=-x\,,\quad x=\frac{a}{2}$$

図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体は，$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ では $y=\cos x$，$\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $y=\cos(x-a)$ を 1 回転させたものに等しく，その体積 V は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\cos^2x\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}(1+\cos 2x)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{1+\cos 2(x-a)\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\cos 2x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{a}{2}}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2(x-a)}{2}\Big]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{4}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin(\pi-2a)-\frac{\pi}{4}\sin(-a)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin 2a$$

なお, この式は $a=0$ のときも成立する。

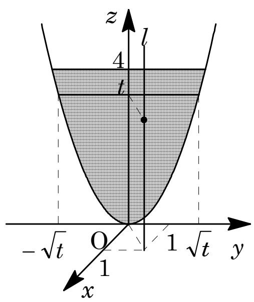
［解 説］

(3)でも利用したように，回転体の体積を求めるとき，回転軸の一方の側に曲線を対称移動してまとめると，ミスが少なくなります。

14　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　まず，平面図形 $D: x=0,\ \ y^2 \leqq z \leqq 4$ と平面 $z=t$ との交わり D_t は，線分となり，

$$x=0,\ -\sqrt{t} \leqq y \leqq \sqrt{t},\ z=t \cdots\cdots\cdots(*)$$



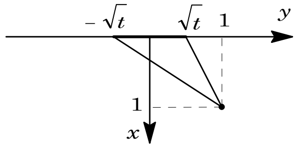
また，直線 l と平面 $z=t$ との交わりは点 $(1,\ 1,\ t)$ である。

さて，$(*)$上の点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

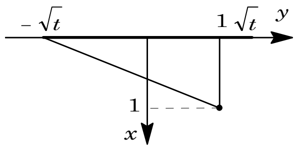
$$m=\sqrt{(1-\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2-2\sqrt{t}+t}$$



(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

$$m=1$$

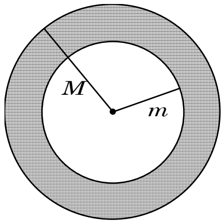


(2)　D を l のまわりに 1 回転させてできる立体 E を，平面 $z=t$ によって切断したとき，その切り口の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(M^2-m^2)$$

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-(2-2\sqrt{t}+t)\}=4\pi\sqrt{t}$$



(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-1\}=\pi(1+2\sqrt{t}+t)$$

(3)　E の体積 V は，

$$V=\int_0^4 S(t)\,dt=4\pi\int_0^1\sqrt{t}\,dt+\pi\int_1^4(1+2\sqrt{t}+t)\,dt$$

$$=4\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\pi\left[t+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2\right]_1^4=\frac{8}{3}\pi+\left(3+\frac{28}{3}+\frac{15}{2}\right)\pi=\frac{45}{2}\pi$$

［解 説］

平面図形を回転したときにできる立体の体積を求めるものです。回転軸に垂直な断面がドーナツ形になるので，その外径と内径を求めるところがポイントです。

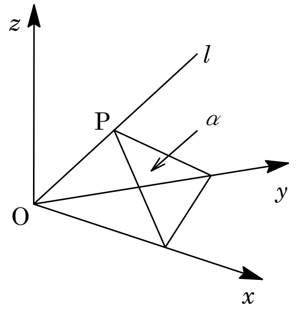
15　　　　［東京工大］

(1)　原点と点(1, 1, 1)を通る直線 l の方程式は,

$$x=y=z\cdots\cdots\cdots①$$

これより，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面 α は,

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0,\ \ x+y+z=t$$



この平面と xy 平面との交線は，$z=0$ を代入して,

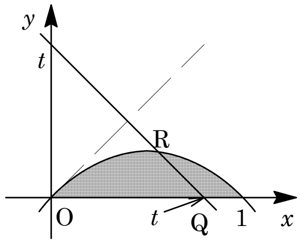
$$x+y=t,\ \ z=0$$

(2)　xy 平面上で，$x+y=t\cdots\cdots②$ と $y=x(1-x)\cdots\cdots③$ を連立すると,

$$t-x=x-x^2,\ \ x^2-2x+t=0\cdots\cdots\cdots④$$

②と③が共有点をもつ条件は,

$$D/4=1-t\geqq 0,\ \ t\leqq 1$$

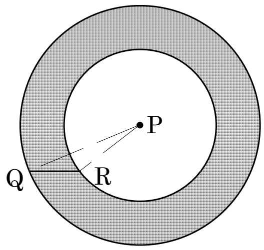


よって，直線②と領域 $D:0\leqq y\leqq x(1-x)$ が共有点をもつ条件は，$0\leqq t\leqq 1$ である。

このとき，右図のように共有点を Q, R とおくと，④から，$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$ となる。

また，直線 l を xy 平面へ正射影すると，直線 $x=y$，$z=0$ となり，この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより，平面 α 上で点 P を中心として線分 QR を回転してできるドーナツ状の図形の外径は PQ, 内径は PR となり，その面積 $S(t)$ は,



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて，直線 l の $x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ の部分を正とする l 軸を設定し，$l=\mathrm{OP}$ とおくと，$t\geqq 0$ において,

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって，$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，求める回転体の体積 V は,

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

［解 説］

過去問を探す気分にはなりませんが，20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。