$\boxed{6}$ ［筑波大］

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

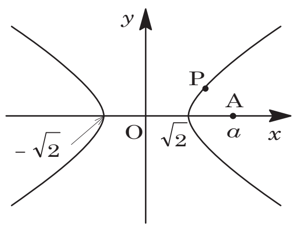
(1)　$f(a)$ を a で表せ。

(2)　$f(a)$ を a の関数とみなすとき, ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。

6

［筑波大］

(1) $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ より，$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$ ……(＊)となり，



$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{x^2}{2}-1\\&=\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1\\&=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}a^2-1\end{aligned}$$

ここで，(＊)から，$\dfrac{x^2}{2}-1\geqq 0$ より，$x\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq x$

(i) $\dfrac{2}{3}a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq\dfrac{2}{3}a$ $\left(a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}，\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\right)$のとき

$x=\dfrac{2}{3}a$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$

(ii) $-\sqrt{2}<\dfrac{2}{3}a<0$ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0\right)$のとき

$x=-\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(-\sqrt{2}-a)^2}=|a+\sqrt{2}|$

(iii) $0\leqq\dfrac{2}{3}a<\sqrt{2}$ $\left(0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$のとき

$x=\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}=|a-\sqrt{2}|$

(2) 曲線 $b=f(a)$ に対して，(1)より，

(i) $a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき

曲線 $b=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$ は，$b^2=\dfrac{1}{3}a^2-1$ から，双曲線 $\dfrac{1}{3}a^2-b^2=1$ の上半分となる。

また，漸近線は，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ である。

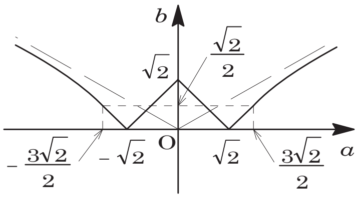
(ii) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0$ のとき

曲線 $b=|a+\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $-\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

(iii) $0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

曲線 $b=|a-\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

以上より，曲線 $b=f(a)$ の概形は，右図のようになる。



［解 説］

最初に双曲線のグラフを書き，「当たり」をつけておくとミスが防げます。