8　　[北海道大]

$0<a<1$, $0<\theta<\pi$ とする。4 点 O$(0,\ 0)$, A$(a,\ 0)$, P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$, Q$(x,\ y)$ が条件 OQ = AQ = PQ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を a と θ で表せ。

(2)　a を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で θ が動くとき, y の最小値を求めよ。

9　　［名古屋大］

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$g(\theta) = f(\cos\theta) - f(\sin\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y = g(\theta)$ のグラフをかけ。

10　　［九州大］

　曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3)　P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

11　　　　［神戸大］

$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\bigl(ax+b(1-x)\bigr)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，$ax+b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

12　　［東京大］

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x \neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

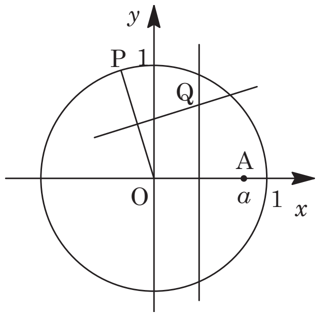
(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

8　　　　［北海道大］

(1)　まず，$OQ=AQ$ より，$Q(x,\ y)$ は線分 OA の垂直二等分線上にあるので，

$$x=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots①$$



また，$OQ=PQ$ より，Q は線分 OP の垂直二等分線上にある。そこで，OP の中点の座標 $\left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right)$ と，$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

$$\cos\theta\left(x-\frac{\cos\theta}{2}\right)+\sin\theta\left(y-\frac{\sin\theta}{2}\right)=0$$

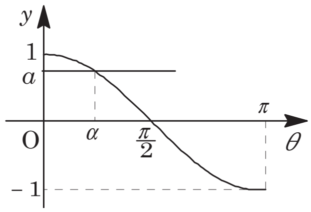
$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$y\sin\theta=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta$ となり，$0<\theta<\pi$ から $\sin\theta\neq0$ なので，

$$y=\frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$Q\left(\frac{a}{2},\ \frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$ である。

(2)　③より，$y'=\frac{a\sin^2\theta-(1-a\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{a-\cos\theta}{2\sin^2\theta}$



$0<a<1$ から，右図のように，$a=\cos\alpha$ とおくと，y の増減は右下表のようになる。

よって，$\theta=\alpha$ において y は最小となり，このとき $\sin\alpha=\sqrt{1-a^2}$ から，最小値は，

$$y=\frac{1-a\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

［解 説］

微分の応用についての頻出タイプの問題です。基本手法の確認のために適切な内容です。

9　　　　［名古屋大］

(1)　$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ……①より，$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

また，$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)$ ……②より，

$$g'(\theta)=-f'(\cos\theta)\sin\theta-f'(\sin\theta)\cos\theta$$
$$=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta-\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta=-\sin\theta|\sin\theta|-\cos\theta|\cos\theta|$$

(2)　①より，$f(-1)=0$，$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，$f(1)=\dfrac{\pi}{2}$ となり，②から，

$$g(0)=f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=-\frac{\pi}{4}$$
$$g(\pi)=f(-1)-f(0)=-\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f(0)-f(-1)=\frac{\pi}{4}$$

(i)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1,\ g(\theta)=-\theta+C_1$$

ここで，$g(0)=\dfrac{\pi}{4}$ から $C_1=\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta,\ g(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_2$$

ここで，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ から $C_2=-\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

(iii)　$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ g(\theta)=\theta+C_3$$

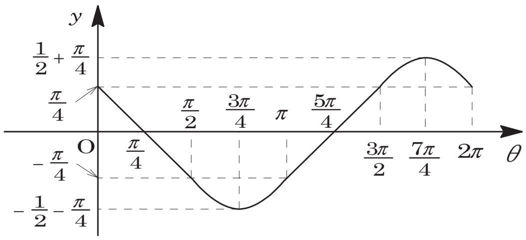
ここで，$g(\pi)=-\dfrac{\pi}{4}$ から $C_3=-\dfrac{5\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\theta-\dfrac{5\pi}{4}$

(iv)　$\dfrac{3\pi}{2}\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta,\ g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_4$$

ここで，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ から $C_4=\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(3)　(2)より，(i)～(iv)の場合をまとめると，$y=g(\theta)$ のグラフは右図のようになる。



［解 説］

合成関数の微分についての興味深い問題です。なお，(2)の $f(0)$，$f(1)$ の値は，四分円，半円の面積をもとに導いています。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　曲線 $y=e^x$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

ここで，$|\vec{v}|=1$ から，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=1$ なので，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

よって，$x=s$ において，$\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}(1,\ e^s)$

(2)　(1)より，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+e^{2x}}\left(e^x\sqrt{1+e^{2x}}-e^x\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{e^x(1+e^{2x})-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$$

よって，$x=s$ において，$\vec{\alpha}=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^2}(-e^{2s},\ e^s)$

(3)　(2)より，$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^4}(e^{4s}+e^{2s})=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^4}(e^{2s}+1)=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$

ここで, $u>0$ に対して，$f(u)=\dfrac{u}{(1+u)^3}$ とおくと，$|\vec{\alpha}|^2=f(e^{2s})$ であり，

$$f'(u)=\frac{(1+u)^3-u\cdot 3(1+u)^2}{(1+u)^6}=\frac{-2u+1}{(1+u)^4}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		＋	0	－
$f(u)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$

右表より，$f(u)$ は $u=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとり，

これより，$|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

［解 説］

大学入試ではあまり見かけない速度，加速度を題材とした問題です。合成関数の微分法がポイントです。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　$f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$ に対して，

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b,\quad f''(x)=-\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a>b>0$ から，$0<x<1$ において $f''(x)<0$ となる。

(2)　まず，$t>0$ のとき，$g(t)=t-1-\log t$ とおくと，

$$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	0	↗

さて，(1)より，$f'(0)=\dfrac{a-b}{b}-\log a+\log b=\dfrac{a}{b}-1-\log\dfrac{a}{b}=g\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$$f'(1)=\frac{a-b}{a}-\log a+\log b=1-\frac{b}{a}+\log\frac{b}{a}=-g\left(\frac{b}{a}\right)$$

ここで，$a>b>0$ から，$\dfrac{a}{b}>1$，$0<\dfrac{b}{a}<1$ から，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$

さらに，(1)から，$0<x<1$ で $f'(x)$ は単調減少であるので，$f'(c)=0$ を満たす実数 c は，$0<c<1$ の範囲にただ１つ存在することになる。

(3)　(2)より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

また，$f(0)=f(1)=0$ から，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となり，

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$$\log(ax+b(1-x))\geqq x\log a+(1-x)\log b$$

$$\log(ax+b(1-x))\geqq \log a^x b^{1-x}$$

よって，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［解 説］

曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを題材としています。(2)で，平均値の定理を直接的に利用しないときは，上のような解になります。

$\boxed{12}$ ［東京大］

(1)　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\frac{x-1}{x}\log(1-x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

さらに，$g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+\frac{x-1}{1-x}=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

これより，$g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に増加し，$-1<x<0$ のとき $g(x)<0$，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	

すると，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，

$$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}g(x)>0$$

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ………(＊)

(2)　(＊)より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ となり，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.9999^{101}<0.99$

また,(＊)より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ となり，

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x=\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.99<0.9999^{100}$

以上より，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ が成り立つ。

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，(2)の式変形については，結論の不等式を $(1-10^{-4})^{1+10^2}<1-10^{-2}<(1-10^{-4})^{10^2}$ とみて方針を立てました。