9　　［北海道大］

自然数 n に対して，$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n}\,dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(4)　$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

10 ［広島大］

曲線 $y=e^x$ 上の点 A$(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 B$(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P′，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q′ とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。

$\boxed{11}$ ［筑波大］

$f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1)　$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3)　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{12}$ ［金沢大］

関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt,\ \ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式

$$f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。

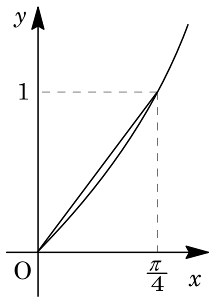
9　　　　[北海道大]

(1)　$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

(2)　$a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\,dx$

$= \Big[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - a_n = \frac{1}{2n+1} - a_n$ ………①



(3)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において，曲線 $y = \tan x$ は下に凸なので，

$0 \leqq \tan x \leqq \frac{4}{\pi}x$，$0 \leqq \tan^{2n} x \leqq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n} x^{2n}$ ………②

②を 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで積分すると，$0 \leqq a_n \leqq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n}dx$

$0 \leqq a_n \leqq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\Big[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} = \frac{\pi}{4(2n+1)}$

すると, $n \to \infty$ のとき $\frac{\pi}{4(2n+1)} \to 0$ より，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(4)　①の両辺に $(-1)^{n+2}$ をかけると，

$(-1)^{n+2}a_{n+1} = -(-1)^{n+2}a_n + \frac{(-1)^{n+2}}{2n+1} = (-1)^{n+1}a_n + \frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$

$n \geqq 2$ において，$(-1)^{n+1}a_n = (-1)^2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+2}}{2k+1} = 1 - \frac{\pi}{4} + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

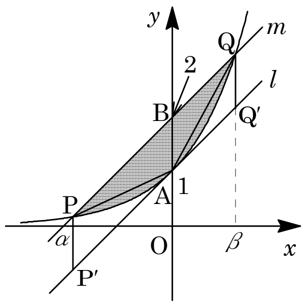
$(-1)^{n+1}a_n = 1 - \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^2}{1} = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

以上より, (3)から，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}a_n + \frac{\pi}{4}\right\} = \frac{\pi}{4}$

[解　説]

細かい詰めがやや面倒ですが，(4)の設問にある有名な級数の値を求める問題です。なお, (2)と(3)の設問は並列で，両者の結果が(4)に繋がるという解法をとっています。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］



(1)　平行四辺形PP′Q′Qの面積 S は,

$$S=1\times(\beta-\alpha)=\beta-\alpha$$

(2)　$y=e^x$ ……①より，$y'=e^x$ となり，A(0, 1)における接線 l の方程式は，$y=x+1$ となる。

また，B(0, 2)を通り l に平行な直線 m は,

$$y=x+2\text{ ………②}$$

①②を連立して，$e^x=x+2$

この方程式の2つの解が $x=\alpha$，β より,

$$e^\alpha=\alpha+2\text{ ………③},\quad e^\beta=\beta+2\text{ ………④}$$

さて，直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は,

$$T=\int_\alpha^\beta(x+2-e^x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(e^\beta-e^\alpha)$$

③④より，$e^\beta-e^\alpha=(\beta+2)-(\alpha+2)=\beta-\alpha$ となり,

$$T=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

(3)　$T<S$ より，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)<\beta-\alpha$ となり，$\beta-\alpha>0$ から,

$$\alpha+\beta+2<2,\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

これより，線分PQの中点 $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{e^\alpha+e^\beta}{2}\right)$ は，第2象限にある。

(4)　$y=e^x$ に対し，$y''=e^x>0$ から，曲線は下に凸になるので,

$$T>\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}S$$

よって，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)>\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ から,

$$\alpha+\beta+2>1,\quad \alpha+\beta>-1$$

［解 説］

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

11　　［筑波大］

(1)　条件より，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ ………①

①の両辺を x で微分すると，

$$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x)\,,\quad e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)=2g(x)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺を x で微分すると，条件から $g'(x)=e^x f(x)$ なので，

$$e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)+e^x\left(f'(x)+f'(x)+xf''(x)\right)=2e^x f(x)$$

よって，$f(x)-1+xf'(x)+2f'(x)+xf''(x)=2f(x)$ より，

$$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　$f(x)$ を n 次の整式とし，x^n の係数を $a(\neq 0)$ とおく。ただし, $n\geqq 2$ とする。

すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次，$f''(x)$ は $n-2$ 次の整式となる。

そこで, ③の両辺の x^n の係数を比較すると,

$$na-a=0$$

よって，$n=1$ から不適となり，これより $f(x)$ は定数または 1 次式である。

(3)　まず，$g(x)=0$ であり， ②の両辺に $x=0$ を代入すると,

$$f(0)-1=0\,,\quad f(0)=1$$

(2)の結論を合わせると，$f(x)=px+1$ とおくことができ，③より，

$$p(x+2)-(px+1)=1$$

よって，$p=1$ から，$f(x)=x+1$ となり，

$$g(x)=\int_0^x e^t(t+1)\,dt=\Big[e^t(t+1)\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=e^x(x+1)-1-\Big[e^t\Big]_0^x$$

$$=e^x(x+1)-1-e^x+1=xe^x$$

［解　説］

積分方程式の問題です。(2)の設問のような，ていねいな誘導のため，見かけよりは解きやすくなっています。

12　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　$s=-t$ とおくと，$\dfrac{ds}{dt}=-1$ であり，$t=-1\to 0$ のとき $s=1\to 0$ となる。

また，$f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，$f(-t)=f(t)$ が成り立つので，

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{1}^{0} f(-s)(-ds)=\int_{0}^{1} f(-s)\,ds=\int_{0}^{1} f(s)\,ds=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，条件より，

$$F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt=-\int_{-1}^{x}-(t-x)f(t)\,dt-\int_{x}^{1}(t-x)f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt-x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{x}^{1} tf(t)\,dt+x\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F'(x)=xf(x)-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)+\int_{x}^{1} f(t)\,dt-xf(x)$$

$$=-\int_{-1}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{1} f(t)dt$$

$$F''(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

(3)　条件より，$f'(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$ ……①，$f''(x)=-2f(x)$ ……②

さて，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ に対して，

$$g'(x)=f'(x)+\sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x\ ,\quad g''(x)=f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x$$

すると，$g(0)=f(0)-f(0)\cos 0=0$，$g'(0)=f'(0)+\sqrt{2}f(0)\sin 0=f'(0)$

(1)と①から，$f'(0)=-\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt=0$ となり，$g'(0)=0$

さらに，$G(x)=\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2$ とおき，②を利用すると，

$$G'(x)=\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=g'(x)g''(x)+2g(x)g'(x)$$

$$=g'(x)\left\{f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x+2f(x)-2f(0)\cos\sqrt{2}x\right\}$$

$$=g'(x)\{f''(x)+2f(x)\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より, C を定数として，$G'(x)=C$ ，$\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=C$

さらに，$g(0)=g'(0)=0$ から，$C=0$ となり，

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=0$$

そこで，$\{g'(x)\}^2\geqq 0$，$g(x)^2\geqq 0$ から，$g'(x)=g(x)=0$ となり，

$$f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x=0\ ,\quad f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$$

［解　説］

ていねいな誘導つきの微分方程式の解を求める問題です。