$\boxed{8}$　　　［大阪大］

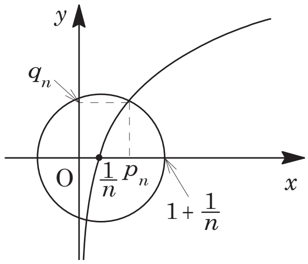
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1)　不等式 $1-{q_n}^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2)　$S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx)\,dx$ を p_n で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

8　　［大阪大］



(1)　点 $(p_n,\ q_n)$ は，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の第１象限にある交点であるので，

$$q_n=\log(np_n)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2+{q_n}^2=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$1-{q_n}^2=\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{(np_n-1)^2}{n^2}\ \cdots\cdots\cdots③$

①より，$np_n=e^{q_n}$ から，$np_n-1=e^{q_n}-1\ \cdots\cdots\cdots④$

③④より，$1-{q_n}^2=\frac{(e^{q_n}-1)^2}{n^2}$

ここで, $0<q_n\leqq 1$ から, $0<e^{q_n}-1\leqq e-1$ となり，$1-{q_n}^2\leqq\frac{(e-1)^2}{n^2}$

さらに, $0<{q_n}^2\leqq 1$ から，$0\leqq 1-{q_n}^2$ となり，

$$0\leqq 1-{q_n}^2\leqq\frac{(e-1)^2}{n^2}$$

すると, $n\to\infty$ のとき $1-{q_n}^2\to 0$ すなわち ${q_n}^2\to 1$ となり，$q_n>0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1$$

(2)　$S_n=\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx=\left[x\log(nx)\right]_{\frac{1}{n}}^{p_n}-\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}x\cdot\frac{1}{x}\,dx=p_n\log(np_n)-p_n+\frac{1}{n}$

(3)　(2)の結果に④を適用すると,

$$nS_n=np_n\log(np_n)-np_n+1=q_ne^{q_n}-e^{q_n}+1=e^{q_n}(q_n-1)+1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(1)から，$\lim_{n\to\infty}q_n=1$ なので, ⑤より $\lim_{n\to\infty}nS_n=1$ である。

［解 説］

ていねいな誘導のついた極限の問題です。この誘導がなければ難問です。