17 ［筑波大・理］

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

18　　　　［一橋大］

a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y=x^3-3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1)　線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2)　直線 AB の方程式が $y=-x-1$ であるとき，a，m の値を求めよ。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C : y = kx^2\ (x \geqq 0)$ と 2 つの直線 $l : y = kx + \dfrac{1}{k}$，$m : y = -kx + \dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha - \beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2 + \beta^2$ および $\alpha^3 - \beta^3$ を k を用いて表せ。

(3)　曲線 C と 2 直線 l，m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

20　　［大阪大・文］

曲線 C : $y=-x^2-1$ を考える。

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　D を(1)で求めた領域の境界とする。D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする。D と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

21　　［名古屋大・文］

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

により定める。

(1)　$a,\ b$ は実数とする。 $y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための $a,\ b$ に対する条件を求めよ。

(2)　$p,\ q$ は実数で $p>0$ とする。 $y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための $p,\ q$ に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。

22　　［東北大・理］

a, b を正の実数とする。曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

23　　[東京大・理]

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大・理］

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ より，$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$，$f(3)=9-\frac{9}{2}a$

$f(-1)\leqq f(3)$ から，$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a$ となり，$a\leqq\frac{7}{3}$

$a>0$ と合わせて，$0<a\leqq\frac{7}{3}$

(2)　$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，極小値 $f(a)=-\frac{1}{6}a^3$ が $f(-1)$ 以下であることから，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗

$$-\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a,\ a^3-3a-2\geqq 0,\ (a+1)^2(a-2)\geqq 0$$

$a>0$ より, $a\geqq 2$

(3)　(i)　$0<a<3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，(2)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗	

(i-i)　$0<a<2$ のとき　$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

(i-ii)　$2\leqq a<3$ のとき　$f(a)=-\frac{1}{6}a^3$

(ii)　$a\geqq 3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (1)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		＋	0	－	0
$f(x)$		↗	0	↘	

$$f(3)=9-\frac{9}{2}a$$

［解　説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)は計算が不要となっています。

18　　　　［一橋大］

(1) 曲線 $y=x^3-3ax^2$ ……①上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3-3a\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3-3a\beta^2)$ とおく。

すると，$y'=3x^2-6ax$ から,

$$m=3\alpha^2-6a\alpha \cdots\cdots\cdots②,\quad m=3\beta^2-6a\beta \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$3(\alpha^2-\beta^2)-6a(\alpha-\beta)=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ から，$\alpha+\beta=2a$ ………④

さて, 線分 AB の中点 C は，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\right)$から，④より，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=8a^3-6a\alpha\beta-12a^3+6a\alpha\beta=-4a^3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ となり，点 C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にある。

(2) 条件より，点 C が直線 $y=-x-1$ ……⑤上にあるので，$-2a^3=-a-1$ となり，

$$2a^3-a-1=0,\ (a-1)(2a^2+2a+1)=0$$

a は実数より，$a=1$

このとき，①は $y=x^3-3x^2$ となり，⑤との交点は,

$$x^3-3x^2=-x-1,\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0$$

よって，$x=1,\ 1\pm\sqrt{2}$ となる。

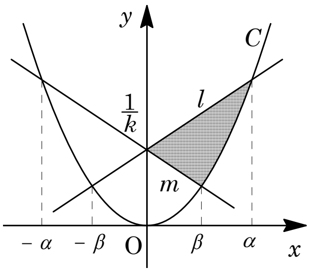
これより, A, B の x 座標は $1\pm\sqrt{2}$ となるので，②③より，複号同順で,

$$m=3(1\pm\sqrt{2})^2-6(1\pm\sqrt{2})=3$$

［解　説］

3 次曲線が点対称であることを題材とした問題です。

19　　［広島大・文］



(1)　曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l:y=kx+\frac{1}{k}$ と $m:y=-kx+\frac{1}{k}$ は y 軸対称である。

そこで，$C:y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と l，m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\frac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\ \ k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\frac{k^2}{k^2}=1$

(2)　(1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\frac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\frac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\Big(k\alpha^2+\frac{1}{k}\Big)\alpha-\frac{1}{2}\Big(k\beta^2+\frac{1}{k}\Big)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\Big(1+\frac{3}{k^2}\Big)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{6}k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\frac{1}{6}k=\frac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

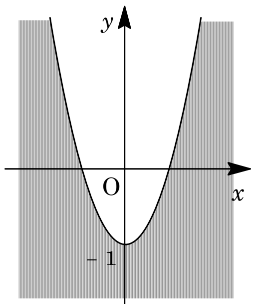
よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

［解 説］

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

$\boxed{20}$　　［大阪大・文］

(1)　$C: y=-x^2-1$ ……①上に頂点のある放物線 $y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ ……②が通過する点$(x,\ y)$の条件は，②を t の方程式としてみたとき，t が実数解をもつ条件に一致する。



②より，$4y=3(x^2-2tx+t^2)-4t^2-4$

$$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$$

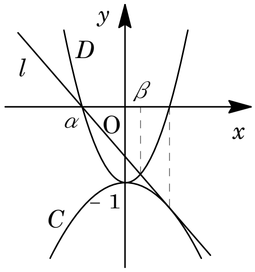
実数解条件より，$D/4=9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$

$$y\leqq 3x^2-1$$

これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

(2)　条件より，$D: y=3x^2-1$ ………③

D と x 軸の正の部分との交点は$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$となり，$C$ 上の点$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{3}\right)$における接線 l の方程式を求めると，①より，$y'=-2x$ から，



$$y+\frac{4}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④の交点は，$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$，$3x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{3}=0$

$$9x^2+2\sqrt{3}x-1=0,\ (3\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)=0$$

よって，$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{3\sqrt{3}}$ となり，$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\beta=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ とおくと，D と l で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}-3x^2+1\right)dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{32}{243}\sqrt{3}$$

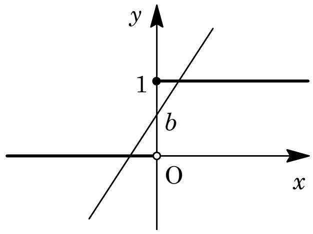
［解 説］

曲線の通過領域と微積分の融合問題です。この両者の必須技法が問われています。

$\boxed{21}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

(1)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$y=ax+b$ のグラフとちょうど 2 つの交点をもつのは，$x<0$，$x \geqq 0$ で 1 回ずつ交わる場合より，

$$a>0,\ 0<b \leqq 1$$



(2)　$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ ……(＊)に対して，

$$y'=3x^2+12px+9p^2$$
$$=3(x+3p)(x+p)$$

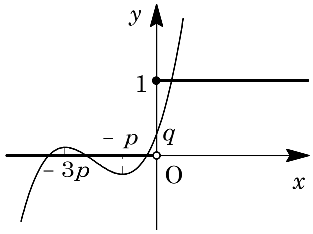
x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
y'	＋	0	－	0	＋
y	↗	q	↘	$-4p^3+q$	↗

$p>0$ から，関数値の増減は右表のようになり，$x \geqq 0$ では単調に増加する。

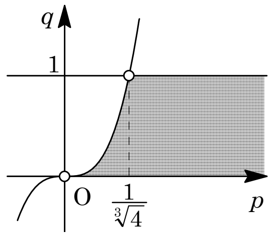
すると，(＊)のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつためには，$x<0$ で 3 回，$x \geqq 0$ で 1 回交わる場合となる。その条件は，$p>0$ のもとで，

$$q>0,\ -4p^3+q<0,\ 0<q \leqq 1$$

まとめると，$p>0$，$q<4p^3$，$0<q \leqq 1$ である。



これを，pq 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，半直線 $q=1\left(p>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ 以外の境界線は領域に含まない。



［解 説］

グラフの位置関係の問題ですが，かなり感覚的なものに頼っています。(1)(2)ともに，もう少し詳しく書いた方がよかったかもしれません。

22　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

(1)　$C : y = x^3 - a^2x + a^3$ に対して，$y' = 3x^2 - a^2$ となり，接点を $(t,\ t^3 - a^2t + a^3)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t),\quad y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 + a^3$$

点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を通ることより，

$$(3t^2 - a^2)b - 2t^3 + a^3 = 0,\quad 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

3 次曲線に異なる 2 点で接する接線は存在しないので，接線が 3 本存在する条件は，①が異なる実数解を 3 個もつことに等しい。

そこで，①の左辺を $f(t) = 2t^3 - 3bt^2 + a^2b - a^3$ とおくと，

$$f'(t) = 6t^2 - 6bt = 6t(t - b)$$

$b > 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

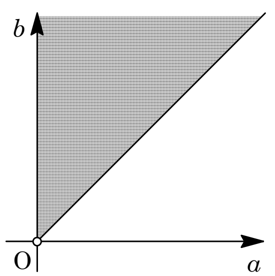
$$f(0) = a^2b - a^3 = a^2(b - a) > 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(b) = -b^3 + a^2b - a^3 < 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$a > 0$ なので，②から，$b > a > 0 \cdots\cdots\cdots ④$

③は，$-b(b^2 - a^2) - a^3 < 0$ となり，④のもとで成立する。

よって，点 P から曲線 C に接線が 3 本引ける a，b の条件は④であり，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(2)　接線がちょうど 2 本引ける条件は，(1)より，$f(0) = 0$ または $f(b) = 0$ である。

(i)　$f(0) = 0$ のとき　$b = a$

このとき，$f(t) = 2t^3 - 3at^2 = 0$ の解は，$t = 0,\ \dfrac{3}{2}a$ である。

そこで，接点を $\mathrm{A}(0,\ a^3)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{23}{8}a^3\right)$ とおくと，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (-a,\ a^3),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \left(\frac{1}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$$

$\angle\mathrm{APB} < 90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} > 0$ となり，$-\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{23}{8}a^6 > 0$ から，$a > \sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

(ii)　$f(b) = 0$ のとき　$b^3 - a^2b + a^3 = 0$

$b > a > 0$ のとき，$b(b^2 - a^2) + a^3 > 0$ となり，成立しない。

$a \geqq b > 0$ のとき，$b^3 + a^2(a - b) > 0$ となり，成立しない。

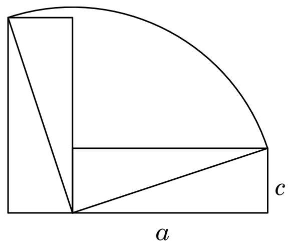
(i)(ii)より，求める条件は，$a = b > \sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$ である。

［解 説］

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。

$\boxed{23}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

(1)　立体 V の回転軸に垂直な断面は，右図のように，半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円に，直角をはさむ 2 辺の長さが a と c の直角三角形を 2 個合わせたものである。

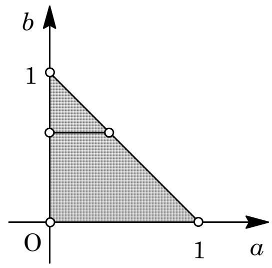


これより，V の体積 W は，

$$W=\left\{\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}ac\right\}b$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a^2+c^2)+abc\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$c=1-a-b>0$ から，$a+b<1$ となり，①より，



$$W=\frac{1}{4}\pi b\{(a+c)^2-2ac\}+abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a+c)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)ab(1-a-b)$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\{-a^2+(1-b)a\}$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2+\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\left\{\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-\frac{(1-b)^2}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②において，いったん b の値を固定して $W=f(a)$ とおくと，$0<a<1-b$ より，

$$f\left(\frac{1-b}{2}\right)\leqq f(a)<f(0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\cdot\frac{(1-b)^2}{4}=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2$

$$f(0)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2$$

さらに，$g(b)=b(1-b)^2$ とおくと，

$$g'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$

$$=(1-b)(1-3b)$$

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

よって，$0<b<1$ のとき $0<g(b)\leqq\frac{4}{27}\cdots\cdots\cdots④$

すると，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)g(b)>0$，$f(0)=\frac{1}{4}\pi g(b)\leqq\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4}{27}=\frac{1}{27}\pi$

以上より，③④から，$0<W<\frac{1}{27}\pi$ である。

［解 説］

いったん 1 文字を固定することにより，とりうる値の範囲を求めていくという東大頻出の問題です。(2)において，W のとりうる範囲を，b を消去して $a+c$ と ac をもとに考えることもできますが，計算がやや煩雑になります。