18　［東北大・文］

放物線 $C: y=x^2$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$ のとき，直線 $x=a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。

19　　　　［千葉大・理］

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が, 3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

20　　［名古屋大・文］

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b)　直線 AB の傾きは 2 である。

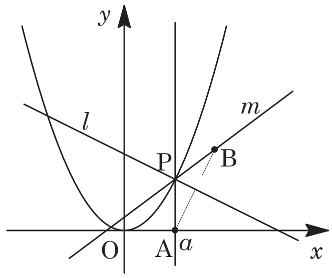
(c)　A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a>0$, $b>0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1)　A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{18}$ ［東北大・文］



(1)　$C: y=x^2$ に対して，$y'=2x$

これから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線の方向ベクトルの成分を $(1,\ 2a)$ とおくことができるので，接線に直交する直線 l の方程式は，

$$(x-a)+2a(y-a^2)=0,\quad x+2ay-a-2a^3=0$$

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ の l に関する対称点を $\mathrm{B}(b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(1,\ 2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(1,\ 2a)$$

よって，$(b,\ c)=(a,\ 0)+k(1,\ 2a)=(a+k,\ 2ak)$ ………①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$ が l 上にあることより，

$$\frac{a+b}{2}+2a\cdot\frac{c}{2}-a-2a^3=0,\quad b+2ac-a-4a^3=0 \text{ ………②}$$

①②より，$a+k+4a^2k-a-4a^3=0$，$k=\dfrac{4a^3}{4a^2+1}$

よって，$(b,\ c)=\left(a+\dfrac{4a^3}{4a^2+1},\ \dfrac{8a^4}{4a^2+1}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(a+\frac{4a^3}{4a^2+1}-a,\ \frac{8a^4}{4a^2+1}-a^2\right)=\frac{a^2}{4a^2+1}(4a,\ 4a^2-1)$$

$a\neq 0$ のとき, 2 点 P, B を通る直線 m の方程式は,

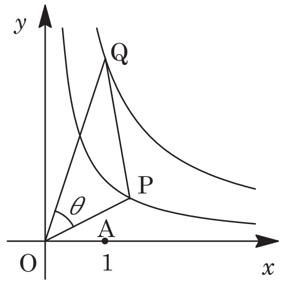
$$y-a^2=\frac{4a^2-1}{4a}(x-a),\quad y=\frac{4a^2-1}{4a}x+\frac{1}{4}$$

(3)　a の値によらず直線 m が通る定点 F の座標は, (2)より，$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。

［解 説］

図形と方程式についての基本題です。ただ, (3)については，定点が 2 点以上存在する可能性はないので, 1 点を見つけて終了としています。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］



$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$となる。

条件より，$\alpha<\beta$なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，△OPQ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\ \cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$とおくと，$\theta=\beta-\alpha$から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$すなわち$pq=\sqrt{a}$のときに成立する。

よって，$\tan\theta$の最大値は$\dfrac{3}{\sqrt{a}}$となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$から，$a=16$である。

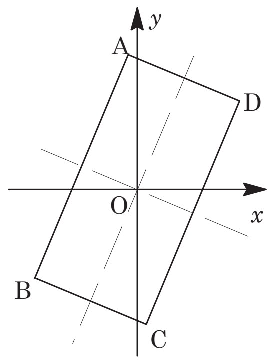
［解 説］

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

20　　[名古屋大・文]

(1)　まず，条件(a)(c)から，頂点の y 座標は, A が最大, C が最小である。

さて，条件(b)より，直線 AB の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(-1,\ -2)$ とおくことができ，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}a\times\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2)=-2a(1,\ 2)$$

ここで，$\mathrm{A}(p,\ q)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(p,\ q)-2a(1,\ 2)=(p-2a,\ q-4a)$$

次に，辺 BC は AB と垂直なので，直線 BC の $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(2,\ -1)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1)=2b(2,\ -1)$$

すると，$\mathrm{B}(p-2a,\ q-4a)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p-2a,\ q-4a)+2b(2,\ -1)=(p-2a+4b,\ q-4a-2b)$$

条件(a)から, C は A と原点対称なので，

$$p-2a+4b=-p\ \cdots\cdots\cdots①,\quad q-4a-2b=-q\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$p=a-2b$，$q=2a+b$ となり，

$$\mathrm{A}(a-2b,\ 2a+b),\ \mathrm{C}(-a+2b,\ -2a-b)$$

また，$p-2a=-a-2b$，$q-4a=-2a+b$ であり, D は B と原点対称なので，

$$\mathrm{B}(-a-2b,\ -2a+b),\ \mathrm{D}(a+2b,\ 2a-b)$$

(2)　$\mathrm{E}(0,\ 5)$ とおくと，E は辺 AD, BC の垂直二等分線 $y=2x$ の上側，辺 AB, DC の垂直二等分線 $y=-\frac{1}{2}x$ の上側にあることより，

$$\mathrm{EA}<\mathrm{EB}<\mathrm{EC},\ \mathrm{EA}<\mathrm{ED}<\mathrm{EC}$$

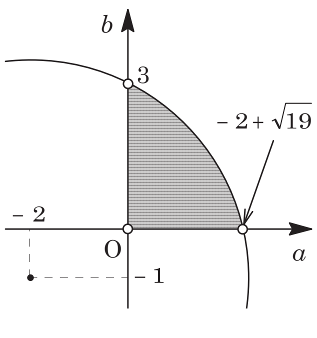
よって，長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ ……③に含まれる条件は，点 C が領域③に含まれる条件に等しく，$(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2\leqq 100$

$$(-a+2b)^2+(-2a-b)^2-10(-2a-b)+25\leqq 100$$

$$5a^2+5b^2+20a+10b-75\leqq 0$$

$$(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20$$

よって，$a>0$，$b>0$ と合わせて，a，b に対する条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，両軸以外の境界線は領域に含む。



[解 説]

図形の配置が指定されているため，単位ベクトルを利用した解で記しています。