10　［九州大］

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と∠B に関する条件を求めよ。

11　　［千葉大・文］

△ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，△ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

12　　［京都大・理］

$1<a<2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a, b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき, a を用いて b を表せ。

13　　　　［長崎大・理］

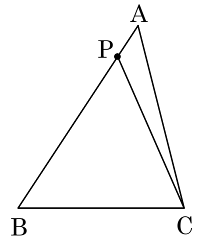
$\angle A=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle B=\alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle BAP=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2)　△BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。

$\boxed{10}$ ［九州大］



(1)　余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，

$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2&=b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle\mathrm{A}\\&=b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\&=ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{CP}=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より，

$b\geqq a$………①，$b^2<a^2+c^2$………②

①より $\angle\mathrm{B}\geqq\angle\mathrm{A}$, ②より $\angle\mathrm{B}<90^\circ$

まとめると，$\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90^\circ$ となる。

［解　説］

三角比の応用についての基本問題です。

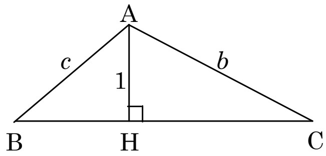
11　　［千葉大・文］

$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とし，$\triangle\mathrm{ABC}$の面積をSとおくと，条件より，

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b\cdots\cdots②,\ S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2=c\cdots\cdots③$$

①②③より，$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=c$となり，$a=2c\cdots\cdots④$，$b=\sqrt{2}c\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$a>b>c$すなわち$\angle\mathrm{A}$が最大角となる。



すると，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の足Hは，辺BC上にあるので，$\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=a$から，

$$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{b^2-1}=a$$

④⑤を代入して，$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{2c^2-1}=2c$，$\sqrt{2c^2-1}=2c-\sqrt{c^2-1}$

ここで，$2c>c>\sqrt{c^2-1}$から，$2c-\sqrt{c^2-1}>0$となり，

$$2c^2-1=4c^2-4c\sqrt{c^2-1}+c^2-1,\ 4\sqrt{c^2-1}=3c$$

これより，$16(c^2-1)=9c^2$となり，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$である。

よって，③から，$S=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$の内接円の半径をrとおくと，③④⑤より，

$$\frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r=c,\ r=\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{7}(3-\sqrt{2})$$

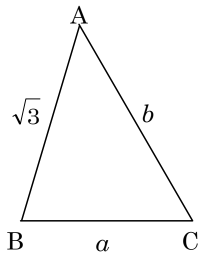
また，$\triangle\mathrm{ABC}$の外接円の半径をRとおき，$\sin B=\dfrac{1}{c}$から，⑤と合わせると，

$$2R=\frac{\sqrt{2}c}{\sin B}=\sqrt{2}c^2=\frac{16}{7}\sqrt{2},\ R=\frac{8}{7}\sqrt{2}$$

［解 説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。上の解では，③に注目して，cの値を求めることを最優先としたものです。ただ，rの値を求めるときには不要でしたが。

$\boxed{12}$　　[京都大・理]



外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において，$AB=\sqrt{3}$，
$BC=a$，$CA=b$ とおくと，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\times 1$$

$$\sin A=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ \sin B=\frac{b}{2}\cdots\cdots②,\ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots③$$

③より，∠C が鋭角から，$C=\dfrac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots④$

①より, $1<a<2$ から $\dfrac{1}{2}<\sin A<1$ となり，∠A が鋭角から $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$B=\dfrac{2}{3}\pi-A$ から $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$ となり，∠B が鋭角という条件は満たされる。

さて，①より，$\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$ となり，②から，

$$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin A$$

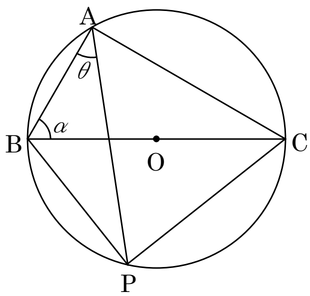
$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

[解 説]

正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの，その後の解法の選択に，運・不運が反映されます。

$\boxed{13}$ ［長崎大・理］

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とすると，点 O は辺 BC の中点であり，$\mathrm{BC}=2R$ となる。



まず，$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$ から，$\mathrm{AB}=2R\cos\alpha$

また，$\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\mathrm{BP}=2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\sin\theta$$

さらに，$\angle\mathrm{ABP}=\alpha+\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP}&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}\sin\angle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta-\alpha)=2R^2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}\\&=R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}\end{aligned}$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$ であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる θ が存在する。すると，この θ において $\sin(2\theta-\alpha)=1$ となり，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積は最大値 $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$ をとる。

(2)　$\mathrm{CP}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\cos\theta$ より，

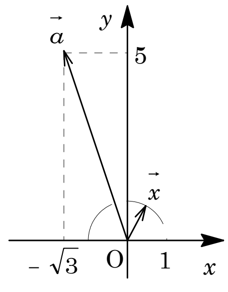
$$\triangle\mathrm{BPC}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$$

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, (1)より，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ となり，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 2\theta\right\}\\&=\frac{1}{4}R^2(\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}+4\sin 2\theta)\\&=\frac{1}{4}R^2(-\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\sqrt{3})\end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{x}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおくと，

$$S=\frac{1}{4}R^2(\vec{a}\cdot\vec{x}+\sqrt{3})$$



ここで，$0<2\theta<\pi$ から，$\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値が最大となるのは，$\vec{x}$ が $\vec{a}$ と同じ向きになるときであり，このとき $\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値は $|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|=2\sqrt{7}$ である。

よって, S の最大値は，$\dfrac{1}{4}(2\sqrt{7}+\sqrt{3})R^2$ である。

［解 説］

(1)の結論は図からストレートに導けますが, (3)も考えて数式処理をしました。