19　［東京工大］

1からnまでの数字がもれなく一つずつ書かれたn枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数である確率を$p(n)$とする。

(1)　$p(8)$を求めよ。

(2)　正の整数kに対し，$p(3k+2)$をkで表せ。

20　　［一橋大］

n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，…，X_n とする。$i=2$，3，…，n に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。

21　　　　［広島大・理］

n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人$(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4)　$P_n(1) \geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ。

22　［千葉大・文］

1 辺の長さが 2 の正六角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5\mathrm{A}_6$ を考える。さいころを 3 回投げ, 出た目を順に i, j, k とするとき, $\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし, i, j, k の中に互いに等しい数があるときは, 得点は 0 であるとする。

(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。

$\boxed{23}$　　　　［名古屋大・文］

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

(1)　a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n で表せ。

(3)　n が奇数ならば $a_n=b_n>c_n$ が成り立ち, n が偶数ならば $a_n>b_n=c_n$ が成り立つことを示せ。

(4)　b_n を求めよ。

$\boxed{19}$ ［東京工大］

(1)　8 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_8C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が 3 となる確率は $\dfrac{{}_5C_1}{{}_8C_2}=\dfrac{5}{28}$，小さい方が 6 となる確率は $\dfrac{{}_2C_1}{{}_8C_2}=\dfrac{2}{28}$ であるので，

$$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$$

(2)　$3k+2$ 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_{3k+2}C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が $3l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ となる確率は，

$$\frac{{}_{3k+2-3l}C_1}{{}_{3k+2}C_2}=\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ の和をとると，

$$p(3k+2)=\sum_{l=1}^{k}\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}\cdot\frac{(3k-1)+2}{2}\cdot k=\frac{k}{3k+2}$$

［解 説］

不思議なぐらい基本的な問題です。なお，(2)の和は，シグマの公式でなく，等差数列の和として計算しています。

20 ［一橋大］

(1)　A_2，A_3，…，A_n が 1 つも起こらないのは，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$ の場合より，その確率は，

$$1\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n は，

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2)　A_2，A_3，…，A_n のうち，1 つだけが起こるのは，$X_1 = X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，$X_1 \neq X_2 = X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，…，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} = X_n$ の場合より，その確率は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1\,\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n は，(1)の結果を合わせて，

$$q_n=p_n-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\frac{n+4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

［解 説］

余事象を考える確率の問題ですが，2000 年に出された類似した設定の問題と比べると，かなり基本的です。

$\boxed{21}$ ［広島大・理］

(1)　勝者が3人であるのは，3人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は，

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　$n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り。次に，得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が2人である確率 $P_3(2)$ は，

$$P_3(2)=\frac{3\times 3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3)　勝者が2人である確率は，(2)と同様に考えると，

$$P_n(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が1人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて，

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

(4)　条件より，$P_n(1)\geqq 0.9$ から，$\dfrac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}\geqq\dfrac{9}{10}$ となり，

$$5(2n-1)(n-1)\geqq 9n^2,\ \ n^2-15n+5\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=x^2-15x+5=\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+5-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$ とおくと，

$$f(0)=5>0,\ \ f(1)=-9<0$$

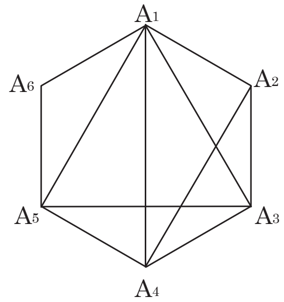
よって，$f(14)<0$，$f(15)>0$ となり，$(*)$を満たす最小の n は $n=15$ である。

［解 説］

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。なお，(4)は 2 次関数のグラフをイメージして解いています。

22

［千葉大・文］



(1)　さいころを 3 回投げて出た目 i, j, k の組は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい。

さて，得点が 0 でないのは，i，j，k がすべて異なるときであり，その確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

よって，得点が 0 となる確率は，$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ である。

(2)　得点を X とおき，$X=n$ のときの確率を $P(n)$ で表すと，$X\neq 0$ であるのは，次の 3 種類である。

(i)　$\triangle A_iA_jA_k$ が 3 辺の長さ 2，2，$2\sqrt{3}$ の二等辺三角形の場合

$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_5$，$\triangle A_4A_5A_6$，$\triangle A_5A_6A_1$，$\triangle A_6A_1A_2$ の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2=3,\ P(3)=\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$$

(ii)　$\triangle A_iA_jA_k$ が 3 辺の長さ 2，$2\sqrt{3}$，4 の直角三角形の場合

長さ 4 の斜辺は A_1A_4，A_2A_5，A_3A_6 の 3 種類あり，それぞれに対して，もう 1 つの頂点は 4 通りずつ決まることより，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\right)^2=12,\ P(12)=\frac{3\times 4\times 3!}{6^3}=\frac{1}{3}$$

(iii)　$\triangle A_iA_jA_k$ が辺の長さ $2\sqrt{3}$ の正三角形の場合

$\triangle A_1A_3A_5$，$\triangle A_2A_4A_6$ の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^2=27,\ P(27)=\frac{2\times 3!}{6^3}=\frac{1}{18}$$

(i)～(iii)より，得点が 27 となる確率は，$\frac{1}{18}$ である。

(3)　X の期待値を $E(X)$ とおくと，(1)，(2)から，

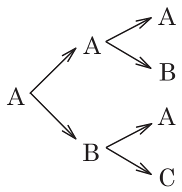
$$E(X)=0\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{3}+27\times\frac{1}{18}=6$$

［解 説］

正六角形を題材とした確率の基本題です。ケアレスミスを防ぐために，すべての場合の確率の和が 1 となっていることの確認が必要です。

$\boxed{23}$ ［名古屋大・文］

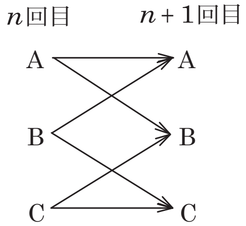
(1)　はじめに，A が赤玉を持っていて，題意の操作をしたところ，赤玉は右図のように移動する。その確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ なので，



$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\ b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(2)　n 回目の操作後から，$n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり，移動の確率は，いずれも $\frac{1}{2}$ から，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$，n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき

(1)から，$a_1 = b_1 > c_1$，$a_2 > b_2 = c_2$ となり，成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$a_{2k-1} = b_{2k-1} > c_{2k-1}$，$a_{2k} > b_{2k} = c_{2k}$ であると仮定すると，①②③より，

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}b_{2k},\ b_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k},\ c_{2k+1} = \frac{1}{2}b_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k}$$

よって，$a_{2k+1} = b_{2k+1} > c_{2k+1}$ となり，さらに，

$$a_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}b_{2k+1},\ b_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1},\ c_{2k+2} = \frac{1}{2}b_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1}$$

よって，$a_{2k+2} > b_{2k+2} = c_{2k+2}$ である。

(i)(ii)より，n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$，n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ である。

(4)　$a_n + b_n + c_n = 1$ なので，②から，$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ となり，

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって，$b_n - \frac{1}{3} = \left(b_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ より，$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

［解 説］

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは，$a_n + b_n + c_n = 1$ です。