26　　［神戸大・理］

p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

27　　［広島大・理］

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3)　m，n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4)　m，n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。

28　　　　［長崎大・医］

4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。
自然数 k, l, m が次の条件

(イ)　k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ)　k は lm の約数である

を満たすならば, k は m の約数である。

(1)　a, b, c, d は整数で，$d \neq 0$ とする。方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2)　方程式 $2x^4 - 2x - 1 = 0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。

29　　［千葉大］

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2 \leqq y \leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。

30　　［一橋大］

0 以上の整数 a_1，a_2 が与えられたとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$$

により定める。

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$ のとき，a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

26　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　条件から, ab が p の倍数より, a または b は p の倍数である。

ここで, a, b の一方が p の倍数, 他方が p の倍数でないとき, $a+b$ は p の倍数ではない。また, a, b がともに p の倍数であるとき, $a+b$ は p の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数である。

(2)　まず, $a+b$ と a^2+b^2 に対して,

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots①$$

$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるので, ①より, $2ab$ は p の倍数である。

p は 3 以上の素数から, 2 と p は互いに素となるので, ab は p の倍数である。

よって, (1)の結果から, a と b はともに p の倍数である。

(3)　まず, a^2+b^2 と a^3+b^3 に対して,

$$ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)\cdots\cdots\cdots②$$

a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるので, ②より, $ab(a+b)$ は p の倍数である。

すると, 条件より, ab または $a+b$ が p の倍数である。

(i)　ab が p の倍数であるとき

①より, $(a+b)^2$ は p の倍数となり, $a+b$ は p の倍数である。

(1)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(ii)　$a+b$ が p の倍数であるとき

(2)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, a と b はともに p の倍数である。

［解　説］

問題文に不必要と思えるほどのヒントが記されています。(3)の②式は①式を参考に作りました。

27 ［広島大・理］

(1)　条件より, $k,\ l$ を 0 以上の整数として，$x=4k+1$，$y=4l+1$ と表すと,

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって，積 xy は 4 で割ると 1 余り，集合 A に属する。

(2)　条件より，$m=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき，二項定理より,

$$3^m=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より，3^m は 4 で割ると 1 余る。

なお，$m=0$ のときは $3^m=1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より，3^m は A に属する。

(3)　まず, (2)と同様に考え，$m+n$ が偶数の場合は, $M,\ N$ を整数として,

(i)　$m=2k$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l}=9^k49^l=(8+1)^k(48+1)^l=(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

(ii)　$m=2k+1$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l+1}=3(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

次に，$m+n$ が奇数の場合は,

(iii)　$m=2k$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l+1}=(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(iv)　$m=2k+1$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l}=3(4M+1)(4N+1)=3(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(4)　$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数は，$0\leqq k\leqq 2m+1$，$0\leqq l\leqq 2n+1$ として 3^k7^l と表せ，この中で A に属する数は，(3)の結果から $k+l$ が偶数の場合である。この数全体の和を S とすると,

$$S=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+(3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1})$$
$$=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})$$
$$=22\cdot\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1}=\frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)$$

［解 説］

整数についての問題で, (1)と(2)が(3)の，そして(3)が(4)の誘導になっています。

28　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［長崎大・医］

(1)　方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(d\neq 0)$ ……①が，有理数の解 $r=\dfrac{q}{p}$ （$p>0$, $q\neq 0$, p と q は互いに素である整数）をもつことより，

$$\frac{q^4}{p^4}+a\cdot\frac{q^3}{p^3}+b\cdot\frac{q^2}{p^2}+c\cdot\frac{q}{p}+d=0,\quad q^4+apq^3+bp^2q^2+cp^3q+dp^4=0$$

すると，$q^4=-p(aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3)$ から，

$$|q|^4=|p|\cdot|aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3|\text{………②}$$

条件から，$|p|$ と $|q|^4$ は 1 以外の公約数をもたず，しかも②から，$|p|$ は $|q|^4\times 1$ の約数なので，$|p|$ は 1 の約数，すなわち $|p|=1$ である。

このとき，$|r|=\dfrac{|q|}{|p|}=|q|$ から，$|r|$ は自然数となる。

そこで，方程式①は整数解 r をもつことになり，$r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$

$$d=-r(r^3+ar^2+br+c),\quad |d|=|r|\cdot|r^3+ar^2+br+c|$$

よって，$|r|$ は $|d|$ の約数である。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ ……③に対して，$2x=t$ とおくと，

$$\frac{t^4}{8}-t-1=0,\quad t^4-8t-8=0\text{………④}$$

さて，方程式④が有理数の解をもつと仮定すると，(1)から，その解は整数で，しかも 8 の約数である。ここで，$f(t)=t^4-8t-8$ とおくと，

$$f(1)=-15,\quad f(-1)=1,\quad f(2)=-8,\quad f(-2)=24$$

$$f(4)=216,\quad f(-4)=280,\quad f(8)=4024,\quad f(-8)=4152$$

これより，方程式④は有理数の解をもたず，実数解はすべて無理数である。

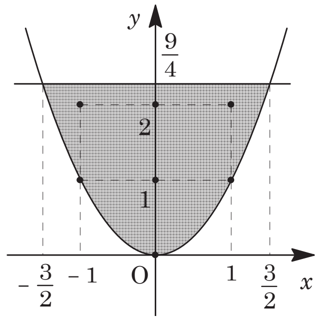
よって，方程式③の実数解はすべて無理数である。

［解 説］

(1)は有名問題ですが，経験がないと難しいでしょう。(2)はその応用で，最高次の係数を 1 にすれば解決です。定数項に注目して逆数をとるという手もあります。

$\boxed{29}$ ［千葉大］

(1)　$a=0$ のとき，$D : x^2 \leqq y \leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D : x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0\ ,\ \ x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2+4b}\,)^3$$

条件より，$\frac{1}{6}(\sqrt{a^2+4b}\,)^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha\leqq x\leqq\beta=\frac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\frac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\frac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\frac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\frac{a+3}{2}$ のとき　格子点は $(\beta,\ \beta^2)$ のみより, 1 個である。

(i)〜(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

［解 説］

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

30　　［一橋大］

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ ……(＊)で定められる数列$\{a_n\}$について，その一の位の数列を$\{b_n\}$とおくと，

$$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=8,\ b_4=0,\ b_5=8,\ b_6=8,\ b_7=6,\ b_8=4,\ b_9=0,$$
$$b_{10}=4,\ b_{11}=4,\ b_{12}=8,\ b_{13}=2,\ b_{14}=0,\ b_{15}=2,\ b_{16}=2,\ b_{17}=4,$$
$$b_{18}=6,\ b_{19}=0,\ b_{20}=6,\ b_{21}=6,\ b_{22}=2,\ b_{23}=8,\ b_{24}=0,\ \cdots\cdots$$

すると，$b_{22}=b_2$，$b_{23}=b_3$となり，(＊)から，$n\geqq 2$ において，数列$\{b_n\}$は周期 20 の周期数列となる。

さて，$2010=1+20\times 100+9$ より，$b_{2010}=b_{1+9}=4$ となるので，a_{2010} を 10 で割った余りは 4 である。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき, (＊)より,

$$a_3=a_2+6a_1=9a_1,\ a_4=a_3+6a_2=27a_1,\ a_5=a_4+6a_3=81a_1$$

これより，$a_n=3^{n-1}a_1$ と予測できる。

まず, この予測の正しいことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　条件より成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$a_k=3^{k-1}a_1$，$a_{k+1}=3^k a_1$ と仮定すると, (＊)より,

$$a_{k+2}=a_{k+1}+6a_k=3^k a_1+6\cdot 3^{k-1}a_1=(1+2)\cdot 3^k a_1=3^{k+1}a_1$$

(i)(ii)より, すべての自然数 n に対して，$a_n=3^{n-1}a_1$ である。

すると，$a_{n+4}-a_n=3^{n+3}a_1-3^{n-1}a_1=(3^4-1)\cdot 3^{n-1}a_1=10\times(8\cdot 3^{n-1}a_1)$

よって，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数である。

［解 説］

漸化式と整数の融合問題は, 1993 年に東大, 1994 年に京大で出題された後, しばらく頻出のものでした。ただ, 本問は, 上記の過去問と異なり, 漸化式が簡単な形で解けるので, この結果を利用したほうがよいのかどうか, かえって迷ってしまいます。この影響のためか, (1)と(2)は異なる立場での解答例となっています。