18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

座標平面上に点 O$(0,\ 0)$ と点 P$(4,\ 3)$ をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1)　k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2)　点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。

19　　　　［熊本大・医］

原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2)　C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。

$\boxed{20}$　　［東北大］

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

(1)　直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点 Q の x 座標を t とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t,\ -\dfrac{4}{3}t+k\right)$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 3)$ から，

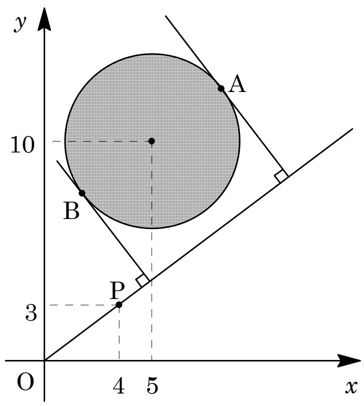
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4t+3\left(-\frac{4}{3}t+k\right)=3k$$

(2)　まず，直線 OP の方程式は，$y=\dfrac{3}{4}x$ であり，この直線と直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\ 4x+3y-3k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とするとき，θ が鋭角ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\theta=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$



ここで，点 R は，領域 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq16$ にあるので，右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大となるのは点 R が点 A に一致するときであり，また最小となるのは点 R が点 B に一致するときである。

いずれの場合も，直線(*)は円 $(x-5)^2+(y-10)^2=16$ に接することより，

$$\frac{|4\cdot5+3\cdot10-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |50-3k|=20$$

これより，$3k=70,\ 30$ となるので，(1)の結果を利用すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=70,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=30$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は 70，最小値は 30 である。

［解 説］

よく見かける内積の最大・最小の問題ですが，(1)が(2)への秀逸な誘導となっています。演習の価値ある 1 題です。

$\boxed{19}$ ［熊本大・医］

(1) 2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x = 2t+(1-t) = t+1,\ \ y = t+2(1-t) = -t+2,\ \ z = 2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，$\triangle OAP$ の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2} = 2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$

$$= 2\sqrt{5t^2-4t+4} = 2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\triangle OAP$ の面積は最小となる。

(2) 3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = 4a = 0 \cdots\cdots ①,\ \ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP} = a(t+1)+b(-t+2)+2ct = 0 \cdots\cdots ②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\dfrac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n} = \left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right) = \frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は, u をパラメータとして,

$$(x,\ y,\ z) = (2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

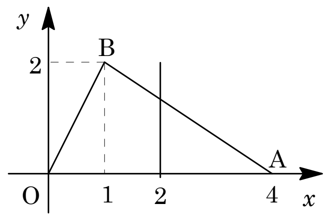
xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\dfrac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z) = (2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2) = \left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。

さて，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{2}{3}(x-4)$ となり，

直線 $x=2$ との交点は，$y=\dfrac{4}{3}$ である。



これより，点 D が $\triangle OAB$ の内部にある条件は,

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から,

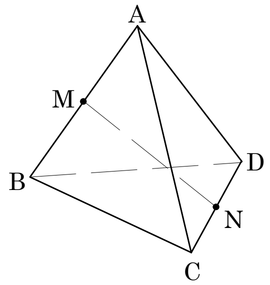
$$3(2+3t)<4(2-t),\ \ t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\dfrac{2}{13}$

［解 説］

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

20　　［東北大］



(1)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN},\ \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2$

$$=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}$$
$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}$$
$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2$$

同様にして，$|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2$

$$=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$……(∗)となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2,\ |\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$$

(∗)を代入して，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MR}|^2$

$$|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2=0,\ |\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{NC}|$$

よって，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ である。

［解 説］

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。