16　　［筑波大］

3 つの曲線

$$C_1: y=\sin x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),\ C_2: y=\cos x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),\ C_3: y=\tan x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

17　　［京都大］

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。

18　　　　［東京大］

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき$\triangle OP_1H_1$と$\triangle OP_2H_2$の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

$\boxed{19}$ ［東北大］

$0<t<3$ のとき，連立不等式

$$0 \leqq y \leqq \sin x\,,\ \ 0 \leqq x \leqq t-y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

20　　［大阪大］

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

16　　　　［筑波大］

(1)　$C_1: y=\sin x$ ……①，$C_2: y=\cos x$ ……②，$C_3: y=\tan x$ ……③に対し，

まず，C_1 と C_2 の交点は，①②から，$\sin x=\cos x$ より，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=\frac{\pi}{4}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

また，C_2 と C_3 の交点は，②③から，$\cos x=\tan x$ より，

$\cos^2 x=\sin x$，$\sin^2 x+\sin x-1=0$

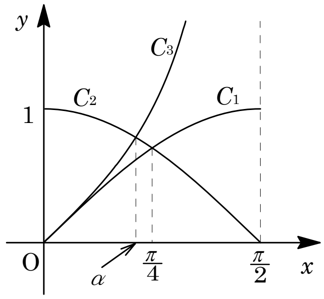
$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における解を $x=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y=\cos\alpha=\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

さらに，C_3 と C_1 の交点は，③①から，$\tan x=\sin x$ より，$\sin x(\cos x-1)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=0$，$y=0$

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_0^\alpha \tan x\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^\alpha+\Big[\sin x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log(\cos\alpha)+\log 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=-\log\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-1$$

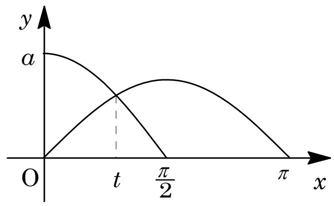
$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

基本的な求積問題です。まったく同じ問題を解いたという記憶はあるものの，出典は思い浮かびません。

17　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^\pi=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の交点を $x=t$ とおくと,

$$\sin t=a\cos t\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると, 2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_0^t \sin x\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^t+a\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\cos t+1+a(1-\sin t)=-a\sin t-\cos t+a+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，条件より $S:T=3:1$ なので，$S=3T$ となり，①③から,

$$2=3(-a\sin t-\cos t+a+1)，\ 3a\sin t+3\cos t-3a-1=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$3(a^2+1)\cos t=3a+1$ となり,

$$\cos t=\frac{3a+1}{3(a^2+1)}，\ \sin t=\frac{a(3a+1)}{3(a^2+1)}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると，$\dfrac{a^2(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}+\dfrac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}=1$

$$\frac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)}=1，\ 9a^2+6a+1=9a^2+9$$

よって，$a=\dfrac{4}{3}$ となり，この値は $a>0$ を満たす。

［解　説］

交点の x 座標を文字でおき，その条件②を用いて，間接的に解き進めるタイプの有名問題です。演習必須の 1 題です。

$\boxed{18}$ ［東京大］

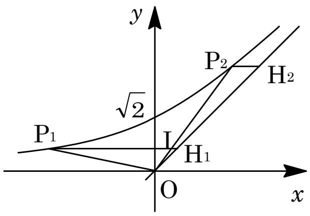
(1)　$C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)$……(＊)に対して，

$$y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)>0,\quad y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+8-x^2}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}=\frac{4}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}>0$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)=\infty$であり，

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}=0$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=0$



よって，曲線Cは下に凸であり，x軸および直線$y=x$を漸近線としてもつ。

さて，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$から，$H_1(y_1,\ y_1)$，$H_2(y_2,\ y_2)$となり，

$$\triangle OP_1H_1=\frac{1}{2}(y_1-x_1)y_1=\frac{1}{8}\left(-x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)\left(x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)=1$$

同様に，$\triangle OP_2H_2=1$となるので，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$である。

(2)　2直線P_1H_1とOP_2の交点をIとおくとき，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$から，

$$\triangle OP_1H_1-\triangle OIH_1=\triangle OP_2H_2-\triangle OIH_1$$

これより，Cと線分P_1O，P_2Oとで囲まれる図形の面積Sは，Cと線分P_1H_1，P_2H_2，および直線$y=x$とで囲まれる図形の面積に等しい。

ここで，(＊)より，$2y=x+\sqrt{x^2+8}$から，$(2y-x)^2=x^2+8$

$$y^2-yx=2,\quad x=y-\frac{2}{y}$$

よって，$\displaystyle S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=2\Big[\log y\Big]_{y_1}^{y_2}=2\log\frac{y_2}{y_1}$

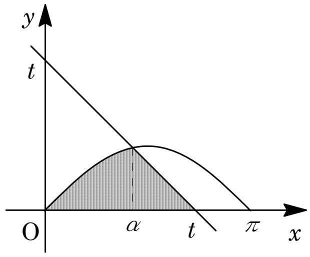
［解　説］

曲線の概形を描くのに，時間がかかります。なお，Sはxで積分することによっても求められます。ただ，(1)を利用して，置換積分を実行しても，3倍程度の記述量が必要です。最初はこの解法でしたが，書き直しました。

19　　［東北大］

領域$0 \leqq y \leqq \sin x$ ……①，$0 \leqq x \leqq t-y$ ……②に対して，$0<t<3$ より，①の境界線$y=\sin x$と②の境界線$y=t-x$の交点はただ１つ存在し，それを$x=\alpha$とおくと，

$$\sin\alpha = t-\alpha\,,\ \ t=\alpha+\sin\alpha \cdots\cdots\cdots③$$



このとき，右図の網点部をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積$V(t)$は，③を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^\alpha \sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-\alpha)\sin^2\alpha=\pi\int_0^\alpha \sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，③から，$\dfrac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$となり，④より，

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}V(t)\frac{d\alpha}{dt}=(\pi\sin^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\cos\alpha)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha}=\pi\sin^2\alpha$$

さて，条件より，$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$なので，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$

$0<\alpha<3$から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$である。

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，③より$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}<3$から適する。

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$のとき，③より$t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$から適さない。

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$であり，このとき，④より，

$$V(t)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\,dx+\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{24}\pi=\frac{\pi^2}{12}-\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{24}\Big)\pi$$

［解　説］

$0<x<\pi$において，$y=\sin x$のグラフは上に凸であり，$x=\pi$における接線の傾きが-1であることから，$y=\sin x$と$y=t-x$の交点はただ１つであることがわかります。また，$0<\alpha<\pi$において，tはαの単調増加関数なので，αはtの関数になっています。

$\boxed{20}$ ［大阪大］

条件より，球T_1，T_2の中心をそれぞれ$(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$とすると，

$$T_1 : x^2+y^2+z^2=9,\ T_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

また，球Sの中心を$(x_0,\ y_0,\ z_0)$とおくと，

$$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$$

さて，SはT_1の内部にあるかT_1に内接していることより，

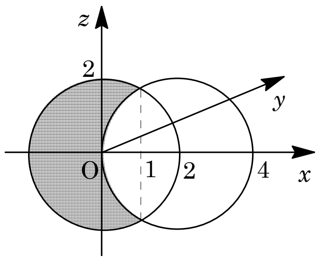
$$\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \leqq 3-1,\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，SはT_2の外部にあるかT_2に外接していることより，

$$\sqrt{(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \geqq 1+1,\ (x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

よって，Sの中心が存在しうる範囲Dは，①②より，

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①'$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②'$$



ここで，平面$x=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$で①′ ②′の共通範囲を切断すると，

$$y^2+z^2 \leqq 4-k^2 \cdots\cdots\cdots ①'$$
$$y^2+z^2 \geqq 4-(k-2)^2 \cdots\cdots\cdots ②'$$

これより，切り口は，x軸上に中心があり，外径が$\sqrt{4-k^2}$，内径が$\sqrt{4-(k-2)^2}$のドーナツ形であり，その面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi(4-k^2)-\pi\{4-(k-2)^2\}=\pi(4-4k)$$

これより，立体Dの体積Vは，

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3+\int_0^1 S(k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+\int_0^1 \pi(4-4k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+2\pi=\frac{22}{3}\pi$$

［解　説］

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお，球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。