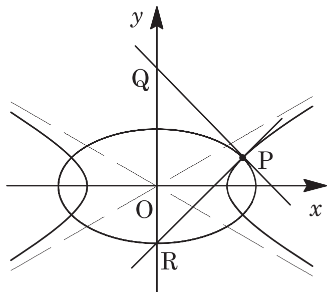
7　　［大阪大］

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1 : x^2+3y^2=3,\quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，y 軸と l_1，l_2 の交点をそれぞれ Q，R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。

7　　　　［大阪大］



$C_1 : x^2+3y^2=3$ ……①，$C_2 : \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2$ ……②

の交点の座標を求める。

まず，②は，$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=2\sin^2\theta\cos^2\theta$ となり，

①と連立すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

ここで，$\varDelta=-\cos^2\theta-3\sin^2\theta=-1-2\sin^2\theta<0$ から，

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -3 \\ -\sin^2\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta+6\sin^2\theta\cos^2\theta \\ 3\sin^2\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta(1+2\sin^2\theta) \\ \sin^2\theta(1+2\sin^2\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta \\ \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ であり，第 1 象限の交点 P は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$

となる。点 P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると，

$$l_1 : \sqrt{3}x\cos\theta+3y\sin\theta=3,\quad l_2 : \frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta}=2$$

y 軸と l_1 の交点は $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$，$l_2$ の交点は $\mathrm{R}(0,\ -2\sin\theta)$ となり，

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{\sin\theta}+2\sin\theta \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta}\cdot 2\sin\theta}=2\sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{1}{\sin\theta}=2\sin\theta$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のときに成立する。

よって，QR の長さの最小値は $2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

楕円周上の点をパラメータ表示することからスタートしました。延々と計算をして，結局，交点は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ であることがわかり，書き直したのが上の解です。