13　　[東北大]

$f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

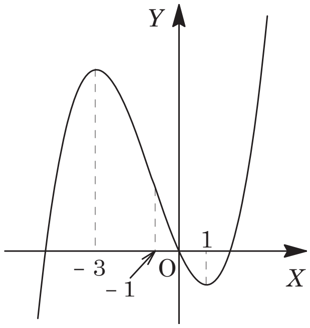
13　　　　［東北大］

$f(X)=X^3+3X^2-9X$ に対して，

$$f'(X)=3X^2+6X-9$$
$$=3(X+3)(X-1)$$
$$f''(X)=6X+6=6(X+1)$$

X	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(X)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(X)$	↗	27	↘	11	↘	-5	↗

これより，$Y=f(X)$ のグラフの概形は右図のようになる。



さて，$y<x<a$ を満たすすべての x,y に対して，

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$y<x<a$ のとき，XY 平面上で 2 点 $(y,\ f(y))$，$(a,\ f(a))$ を結ぶ線分と直線 $X=x$ との交点を $(x,\ g(x))$ とおくと，

$$g(x)=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{(a-x)+(x-y)}$$
$$=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，与えられた条件は，$y<x<a$ を満たすすべての x,y に対して，

$$f(x)>g(x)$$

すなわち，$Y=f(X)$ のグラフが，$X<a$ で上に凸であることを意味する。

よって，求める a の範囲は，$a\leqq-1$ である。

［解 説］

計算のみで処理をするには，計算量が多くなりすぎるので，不等式の意味を考え，直感的に解いています。