$\boxed{13}$　　［大阪大］

関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。

14　　［東京工大］

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1)　$0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2)　$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3)　(2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

関数 $f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

16 ［筑波大］

n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq f(k)$ を示せ。

(2) 不等式 $\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n} \leqq n!$ を導け。

(3) $x \geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x} \leqq n!$ を示せ。

17　［東京大］

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

18　［京都大］

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

$\boxed{13}$　　［大阪大］

(1)　$f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ に対して，$f'(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$ となり，

$$f''(x)=\frac{2e^x(1+e^x)-2e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって，$\log f''(x)=\log 2e^x-2\log(1+e^x)=-2\log(1+e^x)+x+\log 2=-f(x)$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ とし, (1)の結果を適用すると,

$$I=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{\log f''(x)}dx=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx$$

$$=\Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)\,dx=(\log 2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log 2}$$

$$=-f(\log 2)+f(0)=-2\log 3+\log 2+\log 2+(2\log 2-\log 2)$$

$$=-2\log 3+3\log 2=\log\frac{8}{9}$$

［解　説］

定積分の計算問題です。(1)の誘導によって，方針は自然に決まります。

14　　［東京工大］

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ に対して，

$$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x=-x\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)=0$ は唯一の解をもつ。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	2

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，$1-\cos\alpha=\alpha\sin\alpha$ ………(＊)

$$J=\int_0^\pi|f(x)|dx=\int_0^\alpha -f(x)dx+\int_\alpha^\pi f(x)dx$$

ここで，$F(x)=\int f(x)dx$ とおくと，

$$F(x)=\int(1-\cos x-x\sin x)dx=x-\sin x+x\cos x-\int\cos x\,dx$$
$$=x-2\sin x+x\cos x+C$$

よって, (＊)を用いると,

$$J=-\Big[F(x)\Big]_0^\alpha+\Big[F(x)\Big]_\alpha^\pi=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$$
$$=-2\alpha+4\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha$$
$$=-2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+4\sin\alpha=2\sin\alpha$$

(3)　(1)より，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるが,

$$f\Big(\frac{3}{4}\pi\Big)=1+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt2}{2}\Big(\sqrt2+1-\frac{3}{4}\pi\Big)>\frac{\sqrt2}{2}\Big(1.4+1-\frac{3}{4}\times3.2\Big)=0$$

これより，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$ となり,

$$J=2\sin\alpha>2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt2$$

［解　説］

微積分の標準的な問題です。誘導も細かく付けられています。

$\boxed{15}$ ［熊本大］

(1) $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$に対して,

$$f'(x)=-\log_4\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)-\log_4(1+\tan x)$$

ここで, $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$ より,

$$f'(x)=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)=-\log_4\frac{2(1+\tan x)}{1+\tan x}=-\log_4 2$$

$$=-\log_4 4^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(2) (1)より, C を定数として, $f(x)=-\frac{1}{2}x+C$

さて, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$ より, $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+C=0$ となり $C=\frac{\pi}{16}$ から,

$$f(0)=C=\frac{\pi}{16}$$

(3) $a_1=f(0)=\frac{\pi}{16}$, $a_{n+1}=f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{16}$ より,

$$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

これより, $a_n-\frac{\pi}{24}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり,

$$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解 説］

底が 4 の対数というのは, 見た目と異なり配慮の結果でした。なお, (2)は誘導なしですが, この設問の出来が最も重要です。

$\boxed{16}$ ［筑波大］

(1) $f(x)$ は単調増加する連続関数なので，$k-1 \leqq x \leqq k$ において，$f(x) \leqq f(k)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqq \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k)\int_{k-1}^{k} dx = f(k)$$

(2) $x>0$ で $f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は単調増加する連続関数なので, (1)から,

$$\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \log k \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき，①の両辺を，$k=2$ から $k=n$ まで和をとると,

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \sum_{k=2}^{n}\log k$$

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots+\log n = \log(2\times 3\times\cdots\times n) = \log n! \cdots\cdots\cdots ②$$

なお, ②は $n=1$ のときも成立している。

さて, ②の左辺は,

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n = n\log n - n + 1 = \log n^n + \log e^{1-n} = \log n^n e^{1-n}$$

これより, ②は，$n^n e^{1-n} \leqq n!$ となる。

(3) $x \geqq 0$ において，$g(x) = x^n e^{1-x} - n!$ とおくと,

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1}e^{1-x}(n-x)$$

$g(x)$ の増減は右表のようになり, (2)より,

$$g(n) = n^n e^{1-n} - n! \leqq 0$$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$	0	＋	0	－
$g(x)$		↗		↘

よって, $x \geqq 0$ において，$g(x) \leqq 0$ すなわち $x^n e^{1-x} \leqq n!$ である。

［解 説］

至れり尽くせりというぐらい，誘導が非常に細かくついている不等式への応用問題です。

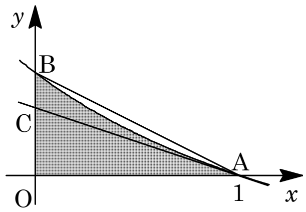
17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　自然数 k に対して，$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$f'(x)=-\frac{k+1}{(k+x)^2}<0,\ \ f''(x)=\frac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，曲線 $y=f(x)$ は下に凸となる。

ここで，$y=f(x)$ と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ とおく。



また，点 A における接線は，

$$y=-\frac{k+1}{(k+1)^2}(x-1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$$

この接線と y 軸の交点を C とすると，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ となる。

そこで，面積を比較して，$\triangle\mathrm{OAC}<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\triangle\mathrm{OAB}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$

$$=-1+(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}=-1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

すると，①より，$\dfrac{1}{2(k+1)}<-1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}<\dfrac{1}{2k}$ となり，

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②において，$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると，

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)=-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

$$=-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}+\log m-\log n=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

よって，③より，$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$

［解　説］

凸関数のグラフの性質を用いて，(1)の不等式の証明をしています。$f(x)$ のグラフを描くと，三角形との関係が見えてきます。(2)も，一癖ある設問です。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[京都大]

まず, n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる $(2n)^n$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき，どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない場合は，${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通りあるので，その確率 p_n は,

$$p_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-n+2}{n}\cdot\frac{2n-n+1}{n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n-1}{n}\cdot\frac{n+n}{n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

すると，$\log p_n=\log\frac{1}{2^n}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)$

となり,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\log 2+\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}=-\log 2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=-\log 2+\int_0^1\log(1+x)\,dx=-\log 2+\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=-\log 2+2\log 2-1=\log 2-1$$

［解 説］

出題頻度が高いとは言えませんが，ときどき見かける確率と区分求積の融合問題です。演習必須の 1 題です。