9　　［九州大］

xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 Q_1 の座標を求めよ。

(2)　三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3)　三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

10　　　　［北海道大］

正の実数 r と $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0 = r\cos\theta$，$b_0 = r$ とおく。a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2) $\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3) $\theta \neq 0$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。

11　　　　［東京工大］

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，…とする。ここに［　］はガウス記号で，実数 u に対し，$[u]$ は u 以下の最大の整数を表す。

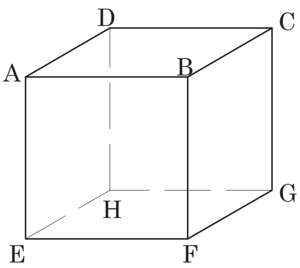
(1)　$a=7$，8，9 の各々について(＊)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

12 ［大阪大］

n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。



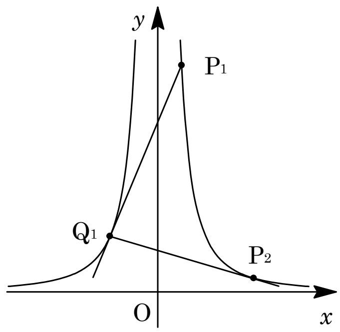
(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。

9　　［九州大］



(1)　$y=\dfrac{1}{x^2}$ に対して，$y'=-\dfrac{2}{x^3}$ となり，点 $\mathrm{Q}_1\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ における接線の方程式は,

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b),\quad y=-\frac{2}{b^3}x+\frac{3}{b^2}$$

点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$を通ることより，$\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{2}{b^3}a+\dfrac{3}{b^2}$

$$b^3-3a^2b+2a^3=0,\quad (b-a)^2(b+2a)=0$$

$b\neq a$ より，$b=-2a$ となり，$\mathrm{Q}_1\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$となる。

(2)　(1)と同様にすると，P_2 は x 座標が $(-2)^2a=4a$ から，$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=\left(-3a,\ -\frac{3}{4a^2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\left(3a,\ -\frac{15}{16a^2}\right)$$

すると，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\left|(-3a)\left(-\frac{15}{16a^2}\right)-\left(-\frac{3}{4a^2}\right)\cdot 3a\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{45}{16a}+\frac{9}{4a}\right|=\frac{81}{32a}$$

(3)　$\mathrm{P}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$，$\mathrm{Q}_n\left(b_n,\ \dfrac{1}{{b_n}^2}\right)$とおくと, (1)と同様にして,

$$a_n=4^{n-1}a_1=4^{n-1}a,\quad b_n=4^{n-1}b_1=4^{n-1}\cdot(-2a)=-2\cdot 4^{n-1}a$$

(2)の結果を用いると，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は,

$$S_n=\frac{81}{32(4^{n-1}a)}=\frac{81}{2a}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

(4)　等比数列$\{S_n\}$の公比は$\dfrac{1}{4}$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{81}{32a}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{27}{8a}$$

［解　説］

無限等比級数の応用問題です。誘導を利用して, 計算量を減少させることがポイントです。

10　　［北海道大］

(1)　条件より, $r>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して, $a_0=r\cos\theta$, $b_0=r$ であり,

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

すると, 帰納的に, $a_n>0$, $b_n>0$ である。

さて, $a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r\cos\theta+r}{2}=r\cdot\dfrac{\cos\theta+1}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+1}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって, $\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2)　0 以上の整数 n に対して, $\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であることを, 数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=r\cos\theta$, $b_0=r$ より, $\dfrac{a_0}{b_0}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ となり成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ すなわち $a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成り立つと仮定すると,

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2^k}+1}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

よって, $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり, $n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq 0$ において, $\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ である。

(3)　(2)より, $b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ なので, $n\geqq 1$ で,

$$\begin{aligned}b_n&=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned}b_n\sin\frac{\theta}{2^n}&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2^n}r\sin\theta\end{aligned}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\frac{1}{2^n} r\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}$

(2)より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cos\dfrac{\theta}{2^n} = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}$

［解 説］

漸化式と極限についての問題です。解法の流れを読み取ることは難しくありません。ただ，(3)で，数列$\{b_n\}$の一般項を，2 倍角の公式を用いてまとめる部分は，経験がものをいいます。

11 ［東京工大］

(1) xを正の実数として，$x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$……(＊)が解をもつ条件は,

$$x \leqq \frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) < x+1 \quad (x\text{は正の整数}) \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$2x^2 \leqq x^2+a$から，$x \leqq \sqrt{a}$

また，$x^2+a < 2x^2+2x$から$x^2+2x-a>0$となり，$x>\sqrt{a+1}-1$より，①は,

$$\sqrt{a+1}-1 < x \leqq \sqrt{a} \quad (x\text{は正の整数}) \cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$のとき，②から$\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$となり，解は$x=2$

$a=8$のとき，②から$3-1<x\leqq\sqrt{8}$となり，解なし

$a=9$のとき，②から$\sqrt{10}-1<x\leqq 3$となり，解は$x=3$

(2) $a=1$のとき，②から$\sqrt{2}-1<x\leqq 1$となり，解は$x=1$

$a=2$のとき，②から$\sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$となり，解は$x=1$

$a=3$のとき，②から$2-1<x\leqq\sqrt{3}$となり，解なし

$a=4$のとき，②から$\sqrt{5}-1<x\leqq 2$となり，解は$x=2$

$a=5$のとき，②から$\sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5}$となり，解は$x=2$

$a=6$のとき，②から$\sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6}$となり，解は$x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (＊)が解をもたないのは，$a=3,\ 8,\ \cdots$となり,

$$a_1=3,\quad a_2=8$$

(3) まず, nを正の整数として,

(i) $n^2 \leqq a < (n+1)^2-1$ ($n\leqq\sqrt{a}$かつ$\sqrt{a+1}-1<n$)のとき

②の整数解は，$x=n$である。

(ii) $a=(n+1)^2-1$のとき

②に代入すると，$n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1}$ ………③

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{2n}{n+n}=1$から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$となり,

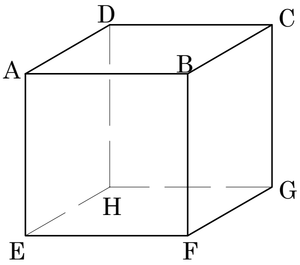
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

［解 説］

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］



(1)　時刻 1 に，点 P は A から B, D, E のいずれかに移動，点 Q は C から B, D, G のいずれかに移動している。

これより，異なる頂点に位置する$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$は，

(B, D)，(B, G)，(D, B)，(D, G)

(E, B)，(E, D)，(E, G)

(2)　まず，(1)から，P と Q が異なる頂点に位置するとき，その位置は 1 つの面の対角線の両端である。

そこで，$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$が異なる頂点に位置するとき，1 回の移動で可能な$3^2=9$通りの$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$の位置のうち，異なる頂点であるのは，(1)から 7 通りである。

すると，時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率を r_n とすると，

$$r_{n+1}=\frac{7}{9}r_n,\quad r_n=r_0\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left(\frac{7}{9}\right)^n$$

(3)　時刻 n において，$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$がともに上面 ABCD の異なる頂点か，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置する状態を A_n とし，$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH の頂点に位置する状態を B_n とする。

すると，状態 A_n である確率が p_n，状態 B_n である確率が q_n である。

さて，(1)から，状態 A_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，状態 B_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は$\frac{2}{9}$，これら以外の状態から状態 A_{n+1} への推移はないので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(4)　(2)(3)より，$p_n+q_n=r_n$ なので，$q_n=r_n-p_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n-p_n\ \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{9}p_n=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}=\frac{1}{9}\left\{p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$$

すると，$p_0=1$ から，$p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left\{p_0-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ となり，②から，

$$p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n,\quad q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot7^n-2}{7^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2\cdot7^{-n}}{1+2\cdot7^{-n}}=2$

［解　説］

問題文が長く，また答案の書きにくい問題です。(3)の状態 B_n からの推移確率については，上面を AEFB，下面を DHGC として見ると，(1)が利用できます。なお，漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。