24　　［名古屋大・文］

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

25　　［京都大・理］

xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。

26　　　　［一橋大］

xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1)　定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2)　S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を, C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

$\boxed{24}$

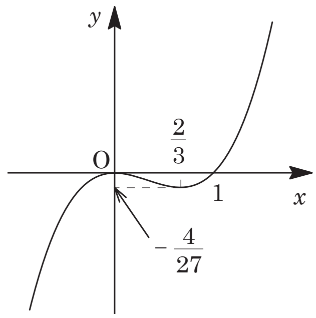
［名古屋大・文］

(1)　$y=x^3-x^2$ ……①に対して，

$$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$$

よって，①のグラフは右下図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



(2)　接点を$(t,\ t^3-t^2)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

②が点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$を通るので，$\frac{3}{2}(3t^2-2t)-2t^3+t^2=0$

$$4t^3-11t^2+6t=0,\ t(4t-3)(t-2)=0$$

よって，$t=0,\ \frac{3}{4},\ 2$となり，接線の方程式は②から，

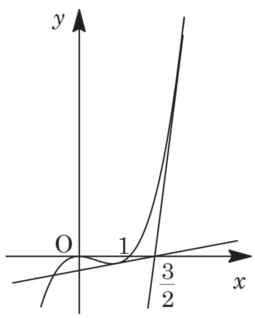
それぞれ

$$y=0,\ y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32},\ y=8x-12$$

(3)　xの3次方程式$x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$の異なる実数解の個数は，曲線①と点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$を通る直線$y=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$……③の共有点の個数に一致する。

そして，(2)より，$p=0,\ \frac{3}{16},\ 8$のとき，①と③は接する。

よって，求める実数解の個数は，図より$p<0$のとき 1 個，$p=0$のとき 2 個，$0<p<\frac{3}{16}$のとき 3 個，$p=\frac{3}{16}$のとき 2 個，$\frac{3}{16}<p<8$のとき 1 個，$p=8$のとき 2 個，$p>8$のとき 3 個である。



［解 説］

方程式の異なる実数解の個数を，対応するグラフの共有点の個数に翻訳して考える頻出の問題です。

25　　［京都大・理］

原点Oを中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sの方程式は,

$x^2+y^2+z^2=6$ ………①

3点$(4,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 4,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αの方程式は,

$x+y+z=4$ ………②

さて, 球面Sの中心Oと平面αの距離dは, $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって, $4<\sqrt{18}$から, $d=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$となり, 球面$S$と平面$\alpha$は共有点をもつ。

ここで, ①②をともに満たすx, y, zに対して, $xyz=k$ ……③とおく。

①②より, $xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\left\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right\}=5$ ………④

すると, ②③④より, x, y, zはuに関する3次方程式$u^3-4u^2+5u-k=0$, すなわち$u^3-4u^2+5u=k$ ……⑤の3つの実数解としてみることができる。

さらに, ⑤をuv平面上でとらえなおし,

$v=u^3-4u^2+5u$ ………⑥, $v=k$ ………⑦

これより, kの値の範囲は, 曲線⑥と直線⑦が3個の共有点(接点は2個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

⑥より, $v'=3u^2-8u+5=(3u-5)(u-1)$

曲線⑥の増減は右表のようになり, 曲線⑥とu軸に平行な直線⑦の共有点が3個(接点は2個とみなす)となるkの条件は, $\dfrac{50}{27}\leqq k\leqq 2$であるので,

u	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{50}{27}$	$\nearrow$

$\dfrac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$

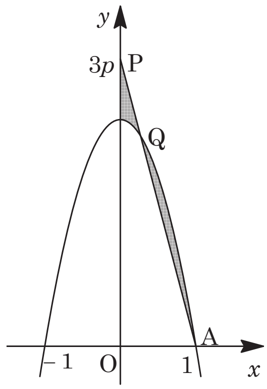
［解　説］

導入は空間図形ですが, 内容は, 条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので, 演習は必須です。

26

［一橋大］

(1)　$C: y=-3x^2+3$ ……①と AP : $y=-3p(x-1)$ ……②を連立すると,



$$-3x^2+3=-3p(x-1),\ -3(x-1)(x+1-p)=0$$

よって, $x=1,\ p-1$ となり, 線分 AP と C が A とは異なる点 Q を共有していることから,

$$0 \leqq p-1<1,\ 1 \leqq p<2$$

(2)　C と線分 AQ で囲まれた領域 S_1 の面積 T_1 は,

$$T_1=\int_{p-1}^{1}\left\{-3x^2+3+3p(x-1)\right\}dx$$

$$=-3\int_{p-1}^{1}(x-1)(x+1-p)dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-p+1)^3=\frac{1}{2}(2-p)^3$$

また, C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域 S_2 の面積 T_2 は,

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3p+T_1-\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx=\frac{3}{2}p+T_1-\Big[-x^3+3x\Big]_0^1$$

$$=T_1+\frac{3}{2}p-2$$

ここで, S_1 と S_2 の面積の和を T とおくと,

$$T=T_1+T_2=2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3+\frac{3}{2}p-2=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

$$T'=-3p^2+12p-\frac{21}{2}=-\frac{3}{2}(2p^2-8p+7)$$

$1 \leqq p<2$ における $T'=0$ の解は, $p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ であり, T の増減は右表のようになる。

p	1	…	$\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$	…	2
T'		$-$	0	$+$	
T		↘		↗	

よって, $p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ のとき T は最小となる。

［解 説］

T_2 は, 普通に 0 から $p-1$ までの積分計算でも求められます。ただ, 所要時間が 2 倍ほどになります。