21　　［名古屋大・文］

xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) がある。

(1) $a>0$ とする。OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>1>b>0$ とする。OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

22　　［東京大］

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

23　［筑波大］

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x| \geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

24　　　　［東北大・理］

実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

25　　［北海道大・文］

a, b を実数とし，xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\ ,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\ ,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1)　直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2)　l，l_1，l_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め，それを ab 平面上に図示せよ。

26　［神戸大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。

21　　　　[名古屋大・文]

(1)　O(0, 0)，A(1, 0) に対し，OP : AP＝1 : a を満たす点 P(x, y) は，AP＝aOP，

AP$^2=a^2$OP^2 より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　(1)より，OP : AP＝1 : a を満たす点 P の軌跡は，$a>1$ から，中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，

半径 $\dfrac{a}{a^2-1}$ の円である。また，O(0, 0)，B(0, 1) に対し，OP : BP＝1 : b を満たす

点 P の軌跡は，$0<b<1$ から，中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{1-b^2}$ の円である。

よって，OP : AP : BP＝1 : a : b を満たす点 P が存在するための条件は，

$$\left|\frac{a}{a^2-1}-\frac{b}{1-b^2}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{1-b^2}$$

$$\left|a(1-b^2)-b(a^2-1)\right|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a(1-b^2)+b(a^2-1)$$

$a>1>b>0 \cdots\cdots ②$ のもとで，この不等式を変形していくと，

$$\left\{a(1-b^2)-b(a^2-1)\right\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\left\{a(1-b^2)+b(a^2-1)\right\}^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab(a^2-1)(1-b^2)\leqq 0$

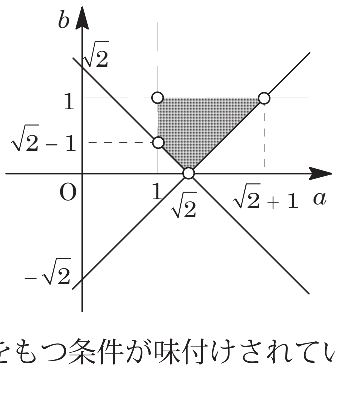
$$(1-b^2)-(a^2-1)-2ab\leqq 0,\ a^2+b^2+2ab\geqq 2,\ a+b\geqq\sqrt{2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab(a^2-1)(1-b^2)\geqq 0$

$$(1-b^2)-(a^2-1)+2ab\geqq 0,\ a^2+b^2-2ab\leqq 2$$

$$a-b\leqq\sqrt{2} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

以上より，求める条件は②⑤⑥であり，これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，破線の境界線および白丸は領域に含まない。

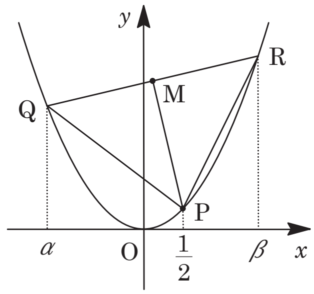


[解 説]

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に工夫が必要な問題です。

22　　　　　　　　［東京大］

点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ に対して，



$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，QR ⊥ PM から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$ から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$，③より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\dfrac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥$

ところで，α，β は，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，β を解とする t に関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$Y>\dfrac{3}{2}\left(X-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

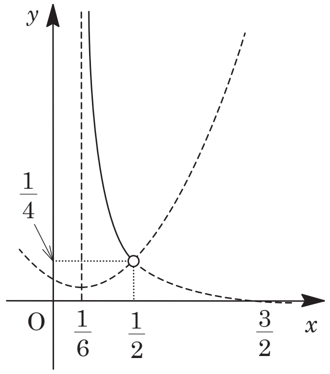
さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



［解 説］

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

$\boxed{23}$ ［筑波大］

(1)　線分 OA の垂直二等分線の方程式は，中点が$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)$より，

$$t\left(x-\frac{1}{2}t\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0,\ 2tx+2y-t^2-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①を t についてまとめると，$t^2-2xt-2y+1=0\cdots\cdots\cdots②$

すると，$|t|\geqq 1$ のとき直線①が通過する点$(x,\ y)$は，t についての 2 次方程式②が$|t|\geqq 1$に少なくとも 1 つの実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

ここで，$f(t)=t^2-2xt-2y+1=(t-x)^2-x^2-2y+1$ とおくと，

(i)　$|x|\geqq 1$ $(x\leqq -1,\ 1\leqq x)$のとき

求める条件は，$f(x)=-x^2-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

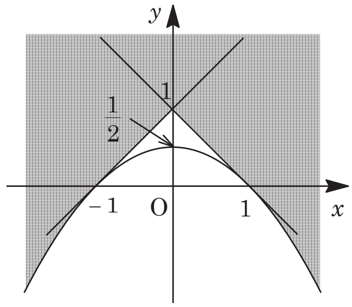
(ii)　$|x|<1$ $(-1<x<1)$のとき

求める条件は，$f(1)=1-2x-2y+1\leqq 0$ または $f(-1)=1+2x-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -x+1 \text{ または } y\geqq x+1$$

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

直線の通過領域を求める頻出問題です。2 次方程式の実数解の条件として処理をしています。

24　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

(1)　不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す領域に，点 $(p,\ q)$ が存在しているので，

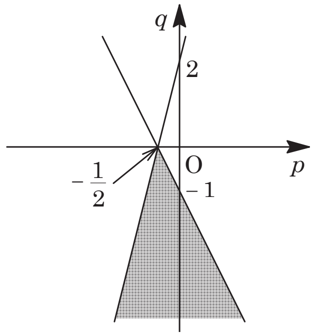
$$q \leqq 2ap - a^2 + 2a + 2,\quad a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

ここで，$f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とおくと，(∗)は $f(a) \leqq 0$ となる。

さて，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$
$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

よって，点 $(p,\ q)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　(1)と同様に，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

(i)　$p + 1 \leqq -1\ (p \leqq -2)$ のとき

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$

(ii)　$-1 \leqq p + 1 \leqq 2\ (-2 \leqq p \leqq 1)$ のとき

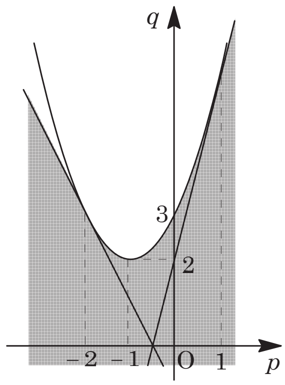
$f(a) = 0$ が実数解をもつことより，

$$D/4 = (p+1)^2 - q + 2 \geqq 0,\quad q \leqq (p+1)^2 + 2$$

(iii)　$p + 1 \geqq 2\ (p \geqq 1)$ のとき

$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

(i)〜(ii)より，点 $(p,\ q)$ の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

25　　［北海道大・文］

(1)　直線$l_1 : ax+y=2a+2$は，$y=-a(x-2)+2$より，どんな a の値に対しても，点$(2,\ 2)$を通る。よって，$\mathrm{P}(2,\ 2)$である。

(2)　直線$l_2 : bx+y=2b+2$は，$y=-b(x-2)+2$より，どんな b の値に対しても，点$\mathrm{P}(2,\ 2)$を通るので，l_1，l_2の交点は$\mathrm{P}(2,\ 2)$である。すると，直線$l : x+y=0$は点Pを通らないことから，3 直線l，l_1，l_2が同一点で交わる場合はない。

そこで，3 直線l，l_1，l_2によって三角形がつくられるための条件は，

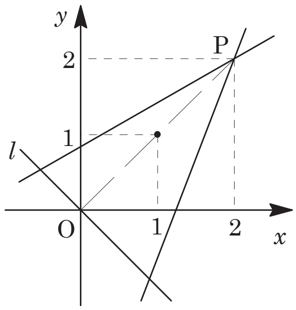
(i)　lとl_1が平行でないとき　$-a\neq-1$より，$a\neq1$

(ii)　lとl_2が平行でないとき　$-b\neq-1$より，$b\neq1$

(iii)　l_1とl_2が平行でないとき　$-a\neq-b$より，$a\neq b$

(i)〜(iii)より，求める$a,\ b$の条件は，

$$a\neq1,\ b\neq1,\ a\neq b$$



(3)　(2)のとき，点$(1,\ 1)$が(2)の三角形の内部にある条件は，図より，lとl_1の交点，lとl_2の交点が，一方は第 2 象限，もう一方は第 4 象限に位置することである。

lとl_1の交点は，$ax-x=2a+2$から，$x=\dfrac{2a+2}{a-1}$

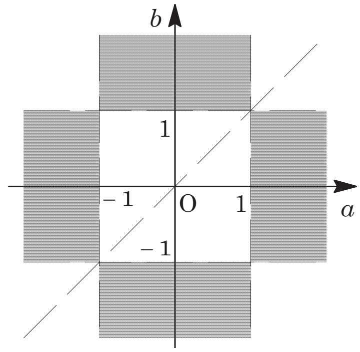
lとl_2の交点は，$bx-x=2b+2$から，$x=\dfrac{2b+2}{b-1}$

よって，求める条件は，$\dfrac{2a+2}{a-1}\cdot\dfrac{2b+2}{b-1}<0$

両辺に$(a-1)^2(b-1)^2$をかけると，

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)<0$$

この領域をab平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

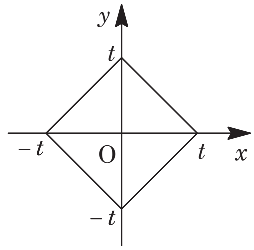


［解 説］

定点を通過する直線についての基本的な問題です。なお，(3)において，分数不等式を変形するときに，分母を 2 乗した式を両辺にかけるという技法は必須です。

$\boxed{26}$ ［神戸大・理］

(1)　$t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii)　$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii) $x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv)　$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

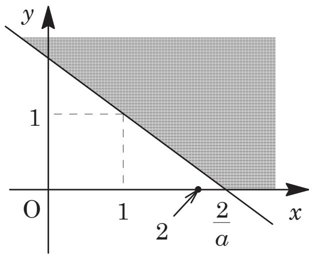
(i)〜(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2)　$a\geqq 0$ のとき，連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$ ……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線 $ax+(2-a)y=2$ …… ②$'$ に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

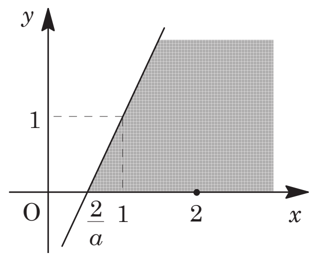
すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②$'$ はつねに点$(1,\ 1)$を通る。また，直線②$'$ は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$である。

さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②$'$ を境界線とする原点を含まない側である。



(i)　$a=0$ または $\dfrac{2}{a}\geqq 2$ $(0\leqq a\leqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点$\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。

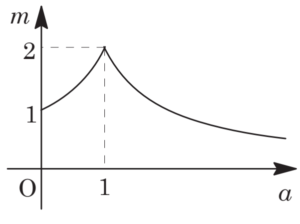


(ii)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$ の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\quad(0\leqq a\leqq 1),\quad m=\frac{2}{a}\quad(a\geqq 1)$$



(3)　(2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。

［解 説］

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。