14　　［千葉大・文］

三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

15　［神戸大・文］

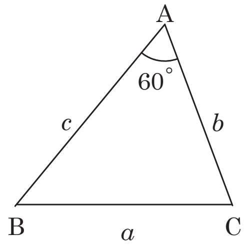
xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2)で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle \mathrm{AOD} = \theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とし，$20 \leqq S \leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。

$\boxed{14}$　　［千葉大・文］



まず，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。

すると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径が 1 から，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2\times 1,\ a=\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots①$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

$$bc=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると，①より，

$$3=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ,\ (b+c)^2-3bc=3$$

②より，$(b+c)^2=6+3\sqrt{3}$，$b+c=\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③$

②③より, b, c は, 2 次方程式 $\sqrt{2}x^2-(3+\sqrt{3})x+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=0$ の 2 つの解となり,

$$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{2})=0,\ t=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$$

条件より, $c>b$ なので，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である。

［解 説］

三角比の三角形への応用についての基本問題です。

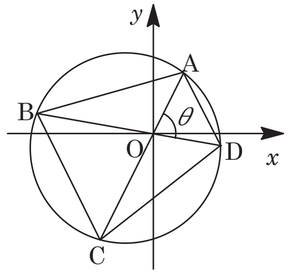
$\boxed{15}$　　［神戸大・文］

(1)　3 点 A, O, C は同一直線上にあり，点 A(1, 2) で，点 C の x 座標が a から，C(a, $2a$) とおくことができる。ただし，$a<0$ である。これより，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}\,|a|=-\sqrt{5}a$$

また，方べきの定理から，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$

すると，条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ なので，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$



(2)　(1)より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}-\sqrt{5}a=\sqrt{5}(1-a)$ より，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\{\sqrt{5}(1-a)\}^2\sin\theta=\frac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta$$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$S=\dfrac{5}{2}(1-a)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}(1-a)^2$

条件より，$20\leqq S\leqq 40$ なので，$20\leqq\dfrac{5}{4}(1-a)^2\leqq 40$ となり，

$$16\leqq(1-a)^2\leqq 32,\ \ 4\leqq 1-a\leqq 4\sqrt{2},\ \ 1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$$

したがって，a のとりうる値の最大値は -3 である。

［解 説］

対角線の長さとその交角をもとに，四角形の面積を導く有名な問題です。注意しなくてはいけないのは，a が負ということです。