$\boxed{24}$ ［岡山大・理］

n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。

25　　　　［名古屋大・文］

数字の 2 を書いた玉が 1 個，数字の 1 を書いた玉が 3 個，数字の 0 を書いた玉が 4 個あり，これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて，この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1) 玉を 2 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。

(2) 玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。

(3) 玉を 8 度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ に対して，1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。

$\boxed{26}$　［千葉大・理］

$k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

$\boxed{27}$ ［一橋大］

AとBの2人が, 1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回めはAが投げる。

1, 2, 3の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる。

4, 5の目が出たら, 次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら, 投げた人を勝ちとし, それ以降は投げない。

(1) n 回目にAがサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ。

28　［九州大・理］

1から4までの数字が1つずつ書かれた4枚のカードがある。その4枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1から4までの数字が1つずつ書かれた4個の球が入っている袋から同時に2個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に1，2，3，4と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ のとき，カードが左から順に1, 2, 3, 4と並ぶ確率を求めよ。

(2)　$n=2$ のとき，カードが左から順に4, 3, 2, 1と並ぶ確率を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき，左端のカードの数字が1になる確率を求めよ。

(4)　$n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。

24　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大・理］

(1)　$3n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

(2)　まず, $3n$ 枚のカードを，書かれた数字によって，次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち，書かれた数字が 3 の倍数の n 枚のカード，(3 の倍数＋1)の n 枚のカード，(3 の倍数＋2)の n 枚のカードである。

すると，3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは，同じタイプから 3 枚を取り出す ${}_n\mathrm{C}_3\times 3$ 通り，3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す $({}_n\mathrm{C}_1)^3=n^3$ 通りの場合がある。これより，その確率は，

$$\frac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率 p_1 は，余事象を考えて，

$$p_1=1-\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

また, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率 p_2 は, (2)より,

$$p_2=1-\frac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

これより，$p_1-p_2=-\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$ となり，

$$\begin{aligned}(p_1-p_2)\,{}_{3n}\mathrm{C}_3&=-\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2)+\frac{3}{6}n(n-1)(n-2)+n^3\\&=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)>0\end{aligned}$$

よって，$p_1>p_2$ から，積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

［解 説］

確率の基本問題です。なお, (2)の分類方法は必須事項です。

25　　［名古屋大・文］

(1)　玉を 2 度取り出すとき，数字の合計が 2 であるのは，$2+0$，$1+1$，$0+2$ の 3 通りより，その確率は，

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$$

(2)　玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 5 以上となるのは，2 を 1 度，1 を 3 度取り出す場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{4!}{3!}=\frac{1}{70}$$

よって，玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率は，

$$1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$$

(3)　まず，8 個の玉の数字の合計が 5 より，与えられた条件が満たされないのは，次の 4 つの場合である。

(i)　玉を 1 度取り出したとき，その数字が 2 以上

このときの確率は，$\frac{1}{8}$ である。

(ii)　玉を 2 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 3 以上

$1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{56}$ である。

(iii)　玉を 3 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 4 以上

$1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$ である。

(iv)　玉を 4 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 3 以下，4 度目までの合計が 5 以上

$1+1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{280}$ である。

(i)～(iv)より，与えられた条件が満たされる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{56}+\frac{1}{56}+\frac{1}{280}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

［解 説］

(3)は読解力がポイントです。具体的に考えて，題意を言い換える力が必要です。

$\boxed{26}$ ［千葉大・理］

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1 = \dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1} = \frac{1}{k}(1-p_n)，\ p_{n+1} = -\frac{1}{k}p_n + \frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を変形すると，$p_{n+1} - \dfrac{1}{k+1} = -\dfrac{1}{k}\left(p_n - \dfrac{1}{k+1}\right)$ となり，

$$p_n - \frac{1}{k+1} = \left(p_1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} = \frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1} = -\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n}$$

よって，$p_n = \dfrac{1}{k+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}$ である。

［解 説］

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで$(*)$が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

27　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　n 回目に A, B がサイコロを投げる確率を，それぞれ a_n，b_n とおくと，条件より，$a_1=1$，$b_1=0$ である。

さて，$n+1$ 回目に A がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るときなので，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目に B がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るときなので，

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{5}{6}(a_n+b_n)$ となり，

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{6}(a_n-b_n)$ となり，

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2)　n 回目のサイコロ投げで A が勝つのは，n 回目に A がサイコロを投げ，6 の目を出すときより，その確率 p_n は, (1)より，

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は, (2)より，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解 説］

確率を計算するときに，漸化式を立てることが有効なタイプの問題です。なお, (2)は疑心暗鬼になってしまう不思議な設問です。

$\boxed{28}$ ［九州大・理］

(1)　4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4C_2=6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

さて，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times6=\frac{1}{6}$$

(2)　操作を 2 回繰り返すとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{18}$$

(3)　操作を 2 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，

(i)　2 と 3, 2 と 4, 3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times3^2=\dfrac{9}{36}$

(ii)　1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times3=\dfrac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{9}{36}+\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{3}$

(4)　操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，(3)と同様に，

(i)　2 回の操作の後，左端が 1 の場合

3 回目に 1 以外の 2 つの数を取り出すことより，その確率は，$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\times3\right)=\dfrac{1}{6}$

(ii)　2 回の操作の後，左端が 1 でない場合

3 回目に左端の数と 1 を取り出すことより，その確率は，$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$

(i)(ii)より，左端のカードの数字が 1 の確率は，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{18}$

また，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 2，3，4 になることは対等なので，その確率はそれぞれ，$\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{5}{18}\right)=\dfrac{13}{54}$ である。

よって，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{13}{54}+3\times\frac{13}{54}+4\times\frac{13}{54}=\frac{22}{9}$$

［解 説］

(3)と(4)は，1 のカードが動かないときと動くときに場合を分けています。