31 ［京都大・文］

0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1) 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2) 各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。

32　　［名古屋大・理］

a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0\,,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

33　　［神戸大・理］

$i=\sqrt{-1}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 α，β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 n に対して，$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ。

(3)　2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

が成り立つことを示せ。

34　　［岡山大・文］

数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (n\text{が奇数のとき}) \\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10}を求めよ。

(2)　nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3)　a_nを3で割ったときの余りを求めよ。

35　［京都大・理］

n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。

$\boxed{36}$ ［東京大・理］

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

31　　　　［京都大・文］

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数は，全部で 2^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 1 が 2^{n-1} 個，2 が 2^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 T_n は，

$$T_n=(1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 2^{n-1}$$
$$=3\cdot 2^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)$$
$$=3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}(10^n-1)$$

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数は，全部で 3^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 0 が 3^{n-1} 個，1 が 3^{n-1} 個，2 が 3^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 S_n は，

$$S_n=(1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 3^{n-1}$$
$$=3\cdot 3^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)$$
$$=3^n\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=3^{n-2}(10^n-1)$$

さて，条件より，$S_n\geqq 15T_n$ なので，$3^{n-2}(10^n-1)\geqq 5\cdot 2^{n-1}(10^n-1)$ となり，

$$3^{n-2}\geqq 10\cdot 2^{n-2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq 10$$

両辺の対数をとって，

$$(n-2)(\log_{10}3-\log_{10}2)\geqq 1,\ n-2\geqq\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

ここで，$0.175=0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301=0.177$ から，

$$5.6<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<5.8$$

よって，n は整数から，$n\geqq 8$ である。

［解 説］

経験がなくても，具体的に考えていけば，T_n や S_n は求めることができます。後半の対数計算も基本的です。

32　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　まず，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①，$y^2+by+a=0$ ……②が，それぞれ整数解をもつとき，a, b が整数より，①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて，$a=b>0$ とするとき，②は①に一致し，整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$(x+k)(x+l)=0$，$x^2+(k+l)x+kl=0$ ………③

①③の係数を比べると，$k+l=a$ ……④，$kl=a$ ……⑤となり，④⑤より，

$kl=k+l$，$(k-1)(l-1)=1$ ………⑥

ここで，④⑤から $a>0$ に注意すると，k, l は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ である。

すると，⑥より，$(k-1,\ l-1)=(1,\ 1)$，$(k,\ l)=(2,\ 2)$

よって，$a=4$ である。

(2)　$a>b>0$ とするとき，(1)と同様に，整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$(x+k)(x+l)=0$，$x^2+(k+l)x+kl=0$

よって，$k+l=a$ ……⑦，$kl=b$ ……⑧となり，$a>b$ と⑦⑧から，

$kl<k+l$，$(k-1)(l-1)<1$ ………⑨

一方，$a>0$，$b>0$ から k, l は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ であることから，

$(k-1)(l-1) \geqq 0$ ………⑩

⑨⑩より，$(k-1)(l-1)=0$ となり，$k=1$ である。

すると，⑦から $a=l+1$，⑧から $b=l$ となり，2 次方程式②は，

$y^2+ly+(l+1)=0$ ………⑪

ここで，(1)と同様にして，整数 m, n $(m \leqq n)$ を用いて，⑪は，

$(y+m)(y+n)=0$，$y^2+(m+n)x+mn=0$ ………⑫

⑪⑫の係数を比べると，$m+n=l$ ……⑬，$mn=l+1$ ……⑭となり，⑬⑭より，

$mn=m+n+1$，$(m-1)(n-1)=2$ ………⑮

ここで，⑬⑭から $l>0$ に注意すると，m, n は自然数となり，$1 \leqq m \leqq n$ である。

すると，⑮より，$(m-1,\ n-1)=(1,\ 2)$，$(m,\ n)=(2,\ 3)$

よって，$l=5$ から，$a=6$，$b=5$ である。

［解 説］

2 つの自然数の和と積の大小関係を，和と積が等しいのは $2+2=2\times 2$，和が積より大きいのは $1+*>1\times *$ というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな，演習に価値ある整数問題です。

$\boxed{33}$ ［神戸大・理］

(1) 加法定理を利用すると,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

(2) $z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$のとき, (1)より,

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2(k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $\cos\frac{2(n+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ より,

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$

(3) (2)より, $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right)=0\cdots\cdots\cdots③$

さて, $n\geqq2$ より $0<\frac{2\pi}{n}\leqq\pi$ となり, $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq1$

よって, ③から $z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=0$ となり, 実部, 虚部を比べ,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

［解 説］

現行の課程では複素数が冷遇されているため, 複素数の極形式に関する問題は, あまり見かけなくなりました。しかし, 次の課程では復活しますので, その先取りでしょうか。

$\boxed{34}$ ［岡山大・文］

(1)　条件より，$a_1=0$ から，$a_2=2a_1=0$，$a_3=a_2+1=1$，$a_4=2a_3=2$，

$a_5=a_4+1=3$，$a_6=2a_5=6$，$a_7=a_6+1=7$，$a_8=2a_7=14$，

$a_9=a_8+1=15$，$a_{10}=2a_9=30$

(2)　まず，$n+4$ と n の偶奇は一致し，

(i)　n が奇数の場合

$$a_{n+4}=a_{n+3}+1=2a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2a_{n+1}+3$$
$$=2\cdot 2a_n+3=4a_n+3\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　n が偶数の場合

$$a_{n+4}=2a_{n+3}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2=2\cdot 2a_{n+1}+2=4a_{n+1}+2$$
$$=4(a_n+1)+2=4a_n+6\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①より $a_{n+4}=3(a_n+1)+a_n$，②より $a_{n+4}=3(a_n+2)+a_n$

これより，n の偶奇にかかわらず，a_{n+4} を 3 で割ったときの余りは，a_n を 3 で割ったときの余りに一致する。

すると，$a_1=a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=2$ から，a_n を 3 で割ったときの余り r_n は，k を 0 以上の整数として，

$$r_n=0\ (n=4k+1,\ 4k+2),\ r_n=1\ (n=4k+3),\ r_n=2\ (n=4k+4)$$

［解 説］

誘導に乗っていけば結論まで到達します。漸化式に整数を融合した頻出問題です。

$\boxed{35}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを，以下，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$\dfrac{1}{2}<a_1<1$，$\dfrac{1}{2}<a_2<1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

よって，不等式$(*)$は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に対して，

不等式 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_k}{2^{k-1}}\right)$ の成立を仮定する。

さて，$\dfrac{1}{2}<a_{k+1}<1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$=-a_{k+1}+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)a_{k+1}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$=\left(-1+a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

$$>\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

ここで，$-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k}=-1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2^k}=0$ より，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$ に対して，不等式$(*)$が成立する。

［解　説］

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

36　　［東京大・理］

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle\sqrt{2}\rangle=\sqrt{2}-1$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle=\sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n=\sqrt{2}-1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1=\langle a\rangle=a\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=a\ \cdots\cdots\cdots②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n=a$ が成り立つ。

さて，$a\geqq\frac{1}{3}$ のとき，①より $\frac{1}{3}\leqq a<1$ であり，$1<\frac{1}{a}\leqq 3$ となる。

(i)　$1<\frac{1}{a}<2\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-1$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-1=a$，$a^2+a-1=0$

$\frac{1}{2}<a<1$ から，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\frac{1}{a}=2\left(a=\frac{1}{2}\right)$ のとき　$a_2=\langle 2\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(iii)　$2<\frac{1}{a}<3\left(\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-2$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-2=a$，$a^2+2a-1=0$

$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ から，$a=-1+\sqrt{2}$

(iv)　$\frac{1}{a}=3\left(a=\frac{1}{3}\right)$ のとき　$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1+\sqrt{2}$

(3)　p を整数, q を自然数として，有理数 $a=\frac{p}{q}$ とおく。

まず, p を q で割り，その余りを r_1 とすると,

$$a_1=\left\langle\frac{p}{q}\right\rangle=\frac{r_1}{q}\quad(0\leqq r_1<q)$$

ここで，$r_1=0$ のときは $a_1=0$ となり，以下, $n\geqq 2$ で $a_n=0$ である。

次に，$r_1\neq 0$ のときは, q を r_1 で割り，その余りを r_2 とすると,

$$a_2=\left\langle\frac{q}{r_1}\right\rangle=\frac{r_2}{r_1}\quad(0\leqq r_2<r_1)$$

ここで，$r_2=0$ のときは $a_2=0$ となり，以下, $n\geqq 3$ で $a_n=0$ である。

さらに，$r_2\neq 0$ のときは，r_1 を r_2 で割り，その余りを r_3 とすると,

$$a_3=\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle=\frac{r_3}{r_2} \quad (0 \leqq r_3 < r_2)$$

余りが 0 でないとき，同様に，この操作を繰り返すと，得られる数列 $\{r_n\}$ は，

$$q > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geqq 0$$

すなわち，単調に減少する整数の数列が得られる。

すると，ある整数 $n=n_0 \leqq q$ において，$r_{n_0}=0$ となる。これより，$a_{n_0}=0$ となり，以下，$n \geqq n_0+1$ で $a_n=0$ である。

したがって，q 以上の自然数 n に対して，$a_n=0$ となる。

［解 説］

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントです。(3)では，正の整数が減少していくと，いつかは 0 になるという事実を利用しています。