21　　［九州大・文］

平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$ となることを示せ。

(3)　$4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{22}$ ［広島大・理］

平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S, 円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

$\boxed{23}$ ［千葉大・理］

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

24　　［北海道大・理］

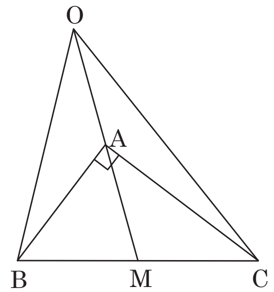
次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ。

$\boxed{21}$

［九州大・文］



(1)　条件より，$4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ………①

また，辺 BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} \text{………②}$$

①②より，$4\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OM}=\vec{0}$，$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$

よって，点 A は線分 OM の中点となる。

(2)　$\angle BAC=90°$ から，$AM=BM=\frac{1}{2}BC=1$

すると，(1)より $|\overrightarrow{OM}|=2$ となり，△OBC に中線定理を適用して，

$$|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=2(|\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{BM}|^2)=10 \text{………③}$$

(3)　条件より，$4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ を変形すると，

$$4|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}|^2=-4$$

$|\overrightarrow{OA}|=1$ および③から，

$$4(1-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2)-(10-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}+2|\overrightarrow{OP}|^2)=-4$$

$$2|\overrightarrow{OP}|^2-2(4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}=2$$

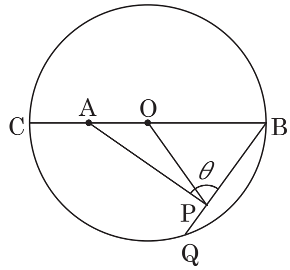
①より，$2|\overrightarrow{OP}|^2=2$ となり，$|\overrightarrow{OP}|=1$ である。

［解 説］

誘導に従えば，テクニカルな変形が不要であるように問題が構成されています。

22

［広島大・理］



(1)　線分 AB を$1:2$に内分する点が O，$1:4$に外分する点が C より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{-2\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2)　点 P は円 S の内部にあるので，$\angle\mathrm{BPC}>90^\circ$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{b}\cdot\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}<0,\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{b}|^2$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}<\dfrac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=k\vec{b}\ (k>0)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}=(1+k)\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=k\vec{b}+\dfrac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}=\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}$

点 Q は円 S 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=(1+k)\vec{b}\cdot\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}=0$ となり，

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}+(3k-1)|\vec{b}|^2=0,\quad 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+(3k-1)|\vec{b}|^2=0$$

よって，$3k|\vec{b}|=|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta$ から，$\mathrm{PQ}=k|\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta}{3}$ となる。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ から，(2)の結果を用いると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{2-12\cos\theta}{3}$ となり，

$$\mathrm{BQ}=2+\frac{2-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{2}=\frac{4-6\cos\theta}{3}\mathrm{BP}$$

また，$\mathrm{BA}=\dfrac{3}{2}\mathrm{BO}$ から，$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{4-6\cos\theta}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{POB}=(2-3\cos\theta)\triangle\mathrm{POB}$

条件より，$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ なので，$2-3\cos\theta=3$ となり，

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},\quad \sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

［解 説］

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

23　　　　［千葉大・理］

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ……②から，$\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle A=90°$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(3k-1)\overrightarrow{OA}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{OA}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O, A, M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$OM\perp BC$ である。

したがって，$AM\perp BC$ となるので，△ABC は $AB=AC$ の二等辺三角形である。

(3)　まず, O と M が一致しないとき, (2)より，$OM\perp BC$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ なので，$\overrightarrow{OI}=\vec{0}$ または $OI\perp BC$ である。

(i)　$\overrightarrow{OI}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$IM\perp BC$ である。

(ii)　$OI\perp BC$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり，$IM\perp BC$ である。

(i)(ii)より，$IM\perp BC$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ から $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ となり，$\overrightarrow{MI}\neq\vec{0}$ なので，$IM\perp BC$ である。

よって，いずれの場合も $IM\perp BC$ であり，これより $IB=IC$ となり，

$$\angle IBC=\angle ICB,\ 2\angle IBC=2\angle ICB,\ \angle ABC=\angle ACB$$

したがって，△ABC は二等辺三角形である。

［解 説］

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

24 [北海道大・理]

(1) 原点O(0, 0)を通る円の方程式を，$x^2+y^2+ax+by=0$ ……①とおく。

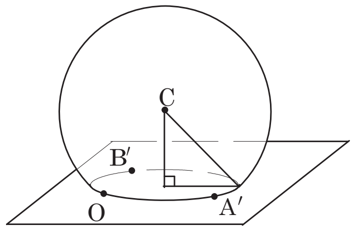
①がA(2, 1)，B(1, 2)を通ることより，

$5+2a+b=0$ ………②，$5+a+2b=0$ ………③

②③より，$a=b=-\dfrac{5}{3}$ となるので，3点O, A, Bを通る円の方程式は，①より，

$x^2+y^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{3}y=0$，$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{18}$ …………④

(2) 3点O(0, 0, 0)，A′(2, 1, 0)，B′(1, 2, 0)を通る球面 S は，(1)から，xy 平面との交線が④で表されることより，その中心を$\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{5}{6},\ c\right)$とおくことができる。



さて，S の半径を r とすると，三平方の定理から，

$r^2=c^2+\dfrac{25}{18}$

よって，S の方程式は，$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\dfrac{25}{18}$

$x^2+y^2+z^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{3}y-2cz=0$ …………⑤

そこで，直線$l: x=t+2,\ y=t+2,\ z=t$ と S の方程式⑤を連立して，

$(t+2)^2+(t+2)^2+t^2-\dfrac{5}{3}(t+2)-\dfrac{5}{3}(t+2)-2ct=0$

$3t^2-\left(2c-\dfrac{14}{3}\right)t+\dfrac{4}{3}=0$ …………⑥

条件より，⑥が実数解をもつので，$D/4=\left(c-\dfrac{7}{3}\right)^2-4\geqq 0$ となり，

$\left(c-\dfrac{7}{3}+2\right)\left(c-\dfrac{7}{3}-2\right)\geqq 0$，$\left(c-\dfrac{1}{3}\right)\left(c-\dfrac{13}{3}\right)\geqq 0$

以上より，求めるC$(a,\ b,\ c)$の条件は，$a=b=\dfrac{5}{6}$ で，$c\leqq\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{13}{3}\leqq c$ である。

[解 説]

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが，球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。