21　　［東北大・理］

a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) X, Y を a を用いて表せ。

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{22}$　　［大阪大］

実数θが動くとき，xy 平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える。$\theta$が$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分をDとする。Dをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積Vを求めよ。

$\boxed{23}$ ［熊本大］

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

$\boxed{24}$ ［名古屋大］

$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\left\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\right\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

$\boxed{21}$ 　　　　［東北大・理］

(1) 円 C の中心 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，点 $(a,\ -a)$ を通り，接線 $y=-x$ に垂直な直線上にあり，

$$Y+a=X-a\,,\ \ X=Y+2a\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 P と点 $(a,\ -a)$ の距離と，点 P と点 $(0,\ 1)$ の距離は等しいので，

$$(X-a)^2+(Y+a)^2=X^2+(Y-1)^2\,,\ \ -2aX+2(a+1)Y+2a^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-2a(Y+2a)+2(a+1)Y+2a^2=1$，$2Y=2a^2+1$ となり，

$$Y=\frac{2a^2+1}{2}\,,\ \ X=\frac{2a^2+1}{2}+2a=\frac{2a^2+4a+1}{2}$$

(2) (1)より，点 P の軌跡は，$x=\dfrac{2a^2+4a+1}{2}$，$y=\dfrac{2a^2+1}{2}$ から，

$$\frac{dx}{da}=2a+2\,,\ \ \frac{dy}{da}=2a$$

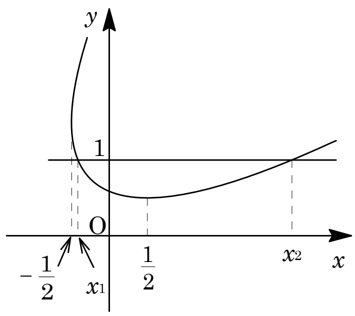
すると, x, y の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$	$-$	0	$+$		$+$
x	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↗
$\dfrac{dy}{da}$	$-$		$-$	0	$+$
y	↘	$\dfrac{3}{2}$	↘	$\dfrac{1}{2}$	↗

また，点 P の軌跡と直線 $y=1$ との交点は,

$$\frac{2a^2+1}{2}=1\,,\ \ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより，点 P の軌跡と直線 $y=1$ とで囲まれる図形の面積 S は,



$$\begin{aligned}S&=\int_{x_1}^{x_2}(1-y)\,dx\\&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(1-\frac{2a^2+1}{2}\Big)(2a+2)\,da\\&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da\\&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da\\&=2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

［解　説］

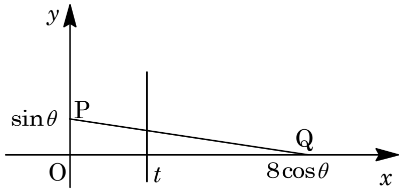
(2)では，最初，パラメータを消去しようとしましたが，交点の座標の値をみて，考え直しました。その結果が，上の解答例です。

$\boxed{22}$ ［大阪大］

まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，$x=0$ $(0\leqq y\leqq 1)$ である。

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，

$$y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta\quad(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$$



さて，直線 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 8\cos\theta)$ 上における y のとりうる値の範囲を求める。

ここで，$f(\theta)=-\dfrac{t}{8}\tan\theta+\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{8\cos^3\theta-t}{8\cos^2\theta}$$

すると，$0\leqq t\leqq 8\cos\theta$ から $0\leqq\sqrt[3]{t}\leqq 2\sqrt[3]{\cos\theta}$ となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}$ となる α がただ 1 つ存在する。また，$8\cos\beta=t$ $\left(\cos\beta=\dfrac{t}{8}\right)$ とおくと，$\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}\geqq\dfrac{t}{8}$ から，$\alpha\leqq\beta$ である。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

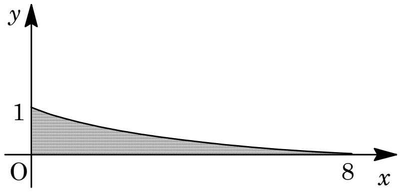
これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，

$$f(\alpha)=-\frac{t}{8}\tan\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(-\frac{t}{8\cos\alpha}+1\right)=\sqrt{1-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}}\left(-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}+1\right)$$

$$=\frac{\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{4-t^{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，線分 PQ が通過する部分 D は，

$$0\leqq y\leqq\frac{1}{8}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



したがって，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^8\frac{1}{64}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{\pi}{64}\int_0^8\left(64-48x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\left[64x-48\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^8=\frac{\pi}{64}\left(2^9-\frac{9}{5}\cdot 2^9+\frac{9}{7}\cdot 2^9-\frac{1}{3}\cdot 2^9\right)$$

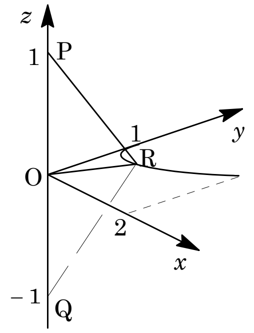
$$=2^3\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

［解　説］

線分の通過領域を求める際に，1 文字を固定して処理する有名問題です。なお，定積分の数値計算が面倒なので，変数を取り直した方がよかったかもしれません。

$\boxed{23}$ ［熊本大］

(1) まず，$\triangle$PQR の xy 平面での切り口は，線分 OR である。すると，立体 K を xy 平面で切ったときの断面は，線分 OR の通過領域として求められる。



さて，$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，点 $\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ は，xy 平面上で放物線 $y=x^2-x+1\ (0 \leqq x \leqq 2)$ ……①を描く。

以下，xy 平面上で考えると，①から，$y'=2x-1$ となり，点 $(a,\ a^2-a+1)$ における接線の方程式は，

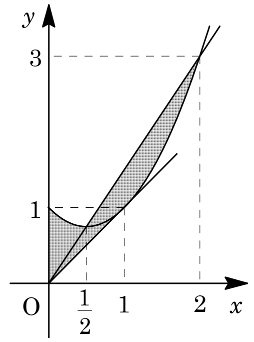
$$y-(a^2-a+1)=(2a-1)(x-a)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

原点を通るとき，$-(a^2-a+1)=-a(2a-1)$，$a^2-1=0$

$0 \leqq a \leqq 2$ から $a=1$ であり，このとき②は，$y=x$ となる。

さらに，$t=2$ のとき $\mathrm{R}(2,\ 3)$ で，直線 $\mathrm{OR}: y=\dfrac{3}{2}x$ と放物線①との交点は，$x^2-x+1=\dfrac{3}{2}x$ より，

$$2x^2-5x+2=0,\ x=\frac{1}{2},\ 2$$



以上より，線分 OR の通過領域は，右図の網点部となり，その面積を S_0 とすると，

$$S_0=\int_0^1 (x^2-x+1)dx-\frac{1}{2}\times 1^2+\int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1-\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^2 -\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{43}{48}$$

(2) まず，立体 K を z 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，K を xy 平面で切ったときの断面と相似である。

そこで，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき，K を平面 $z=k$ で切ったときの断面積を S_k とおくと，相似比が $1-k:1$ であることから，$S_k:S_0=(1-k)^2:1$ となり，

$$S_k=(1-k)^2 S_0=\frac{43}{48}(1-k)^2$$

立体 K は xy 平面について対称なので，その体積 V は，

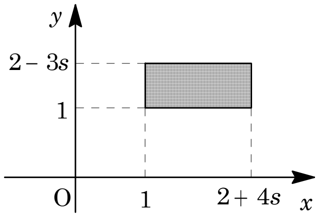
$$V=2\int_0^1 S_k\,dk=\frac{43}{24}\int_0^1 (k-1)^2\,dk=\frac{43}{72}\Big[(k-1)^3\Big]_0^1=\frac{43}{72}$$

［解　説］

設問(1)の定点通過する線分 OR の通過領域は，図形的に解いています。

$\boxed{24}$ ［名古屋大］

(1)　右図の長方形R_sをx軸のまわりに1回転してできる立体K_sの体積$V(s)$は,



$$V(s)=\pi\{(2-3s)^2-1^2\}(2+4s-1)$$
$$=3\pi(3s^2-4s+1)(4s+1)$$
$$V'(s)=3\pi\{(6s-4)(4s+1)+4(3s^2-4s+1)\}$$
$$=6\pi s(18s-13)$$

すると，$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$における$V(s)$の増減は右表のようになる。

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		↗	3π	↘	

よって，$V(s)$は，$s=0$のとき最大値3πをとる。

(2)　$s=0$のとき，長方形$R_s:1\leqq x\leqq 2$, $1\leqq y\leqq 2$となり，立体K_sを表す式は,

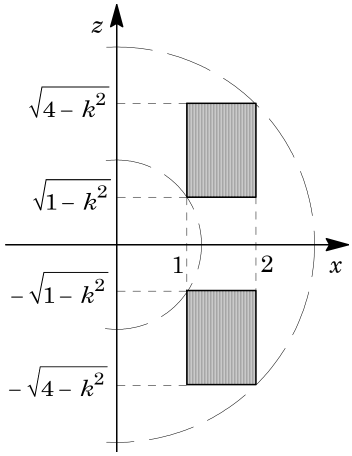
$$1\leqq y^2+z^2\leqq 4,\ 1\leqq x\leqq 2$$

さて，立体K_sを，平面$y=k$で切断したときの断面は,

$$1-k^2\leqq z^2\leqq 4-k^2\cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq x\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，断面の存在するkの範囲は，$-2\leqq k\leqq 2$であるが，xz平面に関する対称性から，以下，$0\leqq k\leqq 2$で考える。

(i)　$0\leqq k\leqq 1$のとき



①より，$\sqrt{1-k^2}\leqq|z|\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。

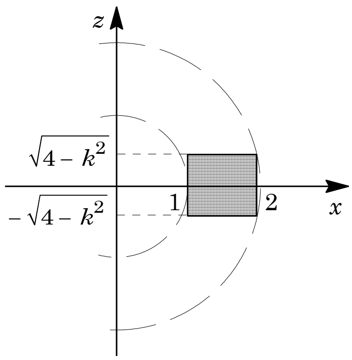
この断面をy軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径をR，内径をrとすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2$$
$$r^2=1^2+\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2=2-k^2$$

よって，このドーナツ形の面積$S(k)$は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=6\pi$$

(ii)　$1\leqq k\leqq 2$のとき



$1-k^2\leqq 0$より，①から，$-\sqrt{4-k^2}\leqq z\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。

この断面をy軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径をR，内径をrとすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2,\ r^2=1^2$$

よって，この図形の面積$S(k)$は，$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(7-k^2)$

(i)(ii)より，立体Lの体積Vは,

$$V=2\int_0^2 S(k)\,dk=2\int_0^1 6\pi\,dk+2\int_1^2 \pi(7-k^2)\,dk=12\pi+2\pi\Big[7k-\frac{k^3}{3}\Big]_1^2$$

$$=12\pi+\frac{28}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める問題で，20 年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお，上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。