8　［筑波大］

d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

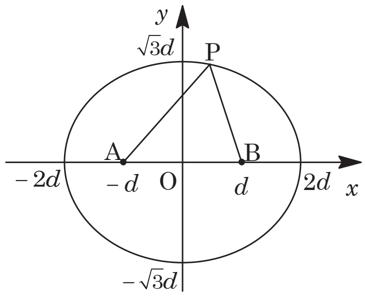
(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3)　点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

8　　［筑波大］

(1)　焦点が $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ より，楕円 E の中心は原点となるので，

$$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a^2-b^2=d^2)$$



条件より，$2a=4d$ から，$a=2d$ となり，

$$b^2=a^2-d^2=3d^2,\ \ b=\sqrt{3}d$$

これより，長軸の長さは $2a=4d$，短軸の長さは $2b=2\sqrt{3}d$ となる。

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=(x+d)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2d^2$$
$$=2\mathrm{OP}^2+2d^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=4d$ なので，①より，

$$2\mathrm{OP}^2+2d^2=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=16d^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$$

よって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=8d^2-\mathrm{OP}^2-d^2=7d^2-\mathrm{OP}^2\cdots\cdots\cdots②$

(3)　$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP})$ なので，①②より，

$$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=4d(2\mathrm{OP}^2+2d^2-7d^2+\mathrm{OP}^2)=4d(3\mathrm{OP}^2-5d^2)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\sqrt{3}d\leqq\mathrm{OP}\leqq 2d$ から $3d^2\leqq\mathrm{OP}^2\leqq 4d^2$ であり，③より，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値は $4d(12d^2-5d^2)=28d^3$，最小値は $4d(9d^2-5d^2)=16d^3$ となる。

［解 説］

楕円の定義について，基本事項を確認する問題です。なお，①式は中線定理です。