14　　［岡山大］

$f(x)=e^{-x^2}$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を l, 原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし, l と l' との交点を P とする。

(1)　線分 OP の長さを求めよ。

(2)　l と y 軸との交点を Q とし, $\angle\mathrm{POQ}$ を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。$\sin\theta$ を a を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と, そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

15　［九州大］

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値 $\lim_{x \to \infty} x^2e^{-x}$ を求めよ。

(3)　k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

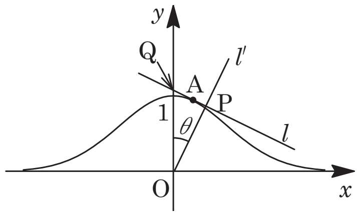
$\boxed{16}$ ［神戸大］

以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ において，$x > 2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし，e を自然対数の底とするとき，$2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。

(2) 自然数 n に対して，$(2n\log n)^n < e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。

14　　［岡山大］



(1)　$f(x)=e^{-x^2}$ より，$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

さて，点A$(a,\ f(a))$における接線 l は，

$$y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$$

$$2ae^{-a^2}x+y-(2a^2+1)e^{-a^2}=0$$

線分OPの長さは，原点Oと直線 l の距離より，

$$\mathrm{OP}=\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}=\frac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(2)　直線 l の法線ベクトルの成分が，$(2ae^{-a^2},\ 1)=e^{-a^2}(2a,\ e^{a^2})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{u}=(2a,\ e^{a^2})$ とし，また $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{v}=(0,\ 1)$ とすると，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ は，

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{e^{a^2}}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

よって，$\sin^2\theta=1-\dfrac{e^{2a^2}}{4a^2+e^{2a^2}}=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ となり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\sin\theta=\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(3)　$t=2a^2\geqq0$ とおき，$g(t)=\dfrac{2t}{2t+e^t}$ とすると，(2)より，$\sin\theta=\sqrt{g(t)}$ となる。

$$g'(t)=\frac{2(2t+e^t)-2t(2+e^t)}{(2t+e^t)^2}=\frac{2(1-t)e^t}{(2t+e^t)^2}$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	$\dfrac{2}{2+e}$	↘

右表より，$g(t)$ は，$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2}{2+e}$ をとる。

よって，$\sin\theta$ が最大となるのは，$2a^2=1$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり，$\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{2}{2+e}}$ である。

［解　説］

計算がやや難の部分もありますが，微分についての標準的な問題です。

$\boxed{15}$ [九州大]

(1)　$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ に対して,

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=-(x^2-a^2)e^{-x}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，極大値は $f(a)=(2a+2)e^{-a}$，極小値は $f(-a)=(-2a+2)e^{a}$ である。

(2)　$x\geqq 3$ のとき，$g(x)=27e^{-3}-x^3e^{-x}$ とおく。

$$g'(x)=-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=x^2(x-3)e^{-x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(3)=0$ となり，$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成立する。

すると，$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$ から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(3)　$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフの共有点の個数は,

$$x^2+2x+2=ke^x+a^2,\ (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

よって，$f(x)=k$ の異なる実数解の個数に一致し，さらに，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数に等しい。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ であり，また(2)より,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x}=0$$

これより，極小値の符号で場合分けをして,

(i)　$(-2a+2)e^a>0$ $(0<a<1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$(-2a+2)e^a<k<(2a+2)e^{-a}$$

(ii)　$(-2a+2)e^a\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$0<k<(2a+2)e^{-a}$$

[解 説]

誘導が非常に細かい問題です。誘導がなく，(3)のみの出題でも完答できることが望まれます。

$\boxed{16}$ ［神戸大］

(1)　$f(x)=x-2\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

$x\geqq 1$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f(2)=2-2\log 2=2(\log e-\log 2)>0$$

よって, $x\geqq 1$ のとき $f(x)>0$ から，$x>2\log x$

(2)　まず，$n=1$ のとき，$0<1$ から $(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ は成立する。

次に, 2 以上の自然数 n に対して, (1)より，$2\log n<n$ となり，$2n\log n<n^2$

ここで, 対数関数は単調増加関数より,

$$\log(2n\log n)<\log n^2,\ n\log(2n\log n)<2n\log n,\ \log(2n\log n)^n<2n\log n$$

よって，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成立する。

［解 説］

(2)は結論を同値変形したものを, 順序を変えて記したものです。最後の問題なので, ひとひねりあるかとも思ったのですが……。