19　　［北海道大］

$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_{x}^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x) \leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。

20　　［金沢大］

次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。

21　　［神戸大］

n を 2 以上の自然数として，$S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ。

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。

22　　［東京医歯大］

自然数 n に対し,

$$S_n=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\ ,\ \ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。

23　　［長崎大］

曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下, k は自然数とする。

(1)　点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2)　次の 2 つの値の大小を比較せよ。

　(ア)　$\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 2$)

　(イ)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$　(ただし，$k\geqq 1$)

(3)　$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4)　2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\quad V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

19　　[北海道大]

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1-\cos\theta}$ とおくと，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}f(\theta)d\theta$ となり，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}$$

(2)　$F'(x)\leqq 0$ より，$\sqrt{1-\cos(x+a)}\leqq\sqrt{1-\cos x}$ となり，両辺を 2 乗して，

$$1-\cos(x+a)\leqq 1-\cos x\,,\ \ \cos(x+a)-\cos x\geqq 0\,,\ \ -2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2}\geqq 0$$

ここで，$0<a<2\pi$ より，$\sin\dfrac{a}{2}>0$ であるので，$\sin\dfrac{2x+a}{2}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$0<x<2\pi$ から $\dfrac{a}{2}<\dfrac{2x+a}{2}<2\pi+\dfrac{a}{2}$ となり，$0<\dfrac{a}{2}<\pi$ に留意して，$(*)$を満たす x の範囲を求めると，

$$\pi\leqq\frac{2x+a}{2}\leqq 2\pi\,,\ \ \pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}$$

(3)　$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\int_x^{x+a}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで，$\dfrac{\theta}{2}=\varphi$ とおくと，$d\theta=2d\varphi$ となり，$F(x)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+a}{2}}|\sin\varphi|d\varphi$

さて，(2)より $F(x)$ の増減は右表のようになり，$F(x)$ は $x=\pi-\dfrac{a}{2}$ のとき極大，$x=2\pi-\dfrac{a}{2}$ のとき極小となる。

x	0	$\cdots$	$\pi-\dfrac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\dfrac{a}{2}$	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

極大値は，$F\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}$$

極小値は，$F\left(2\pi-\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\pi-\frac{a}{4}}^{\pi+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_0^{\frac{a}{4}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)$$

[解　説]

定積分の計算問題です。(1)と(2)の誘導に従えば，方針に迷うことはありません。なお，極大値と極小値の計算では，三角関数の周期性を利用しています。

$\boxed{20}$ ［金沢大］

(1) まず，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$

ここで，自然数 n に対し，$n\leqq x\leqq n+1$ のとき，$\dfrac{1}{n+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{n}$ となり，

$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}\int_n^{n+1}dx\ ,\ \ \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

(2) 2 以上の自然数 n に対して, (1)より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}=\log(n+1)-\log 1=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}=\log n-\log 1=\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺に 1 を加えると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

(3) (2)より, 2 以上の自然数 n に対して，③より，

$$ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{n}}=e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}<e^{1+\log n}=en$$

さらに，①を適用して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ek}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{1}{e}\log(n+1)$$

［解 説］

有名問題です。ただ，丁寧すぎる誘導がついています。

$\boxed{21}$ ［神戸大］

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}=\int_n^{n^3}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx=\Big[\log|\log x|\Big]_n^{n^3}=\log|3\log n|-\log|\log n|$

$$=\log\left|\frac{3\log n}{\log n}\right|=\log 3\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $x>1$ において，$f(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{\log x+1}{(x\log x)^2}<0$

これより，$k\geqq 2$ のとき，$k\leqq x\leqq k+1$ において，$f(k+1)\leqq f(x)\leqq f(k)$ となり，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\leqq\frac{1}{x\log x}\leqq\frac{1}{k\log k}$$

この不等式の各辺を k から $k+1$ まで積分すると，$\displaystyle\int_k^{k+1}dx=1$ から，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}\cdots\cdots\cdots②$$

(3) ②の各辺を n から n^3-1 まで和をとると，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$ より，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}=S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}$ となり，

$$S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}<S_n\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\log 3<S_n<\log 3+\dfrac{1}{n\log n}-\dfrac{1}{n^3\log n^3}$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 3$

［解 説］

はさみうちの原理を利用して極限値を求める問題ですが，方針に迷うことがないよう，たいへん丁寧な誘導がついています。

22　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京医歯大］

(1)　$I_n=\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|$とおくと，

$$I_n=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n-1}{1+x}dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ となるので，

$$I_n\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2)　$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx=\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

また，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$より，

$$T_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$$

よって，$T_n-2S_n=-1-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}=-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

(3)　(1)より，$n\to\infty$ のとき，$I_n\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$$

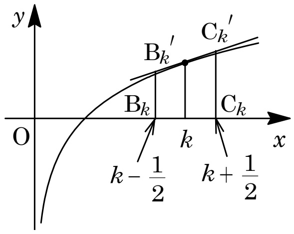
(2)より，$T_n=2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right\}=2\log 2-1$$

［解　説］

定積分と級数について，過去に類題がかなり出ている有名問題です。要演習の 1 題です。

23　　　　　　　　　　　　　　　　［長崎大］



(1)　$y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $A_k{}'(k,\ \log k)$ における接線 l_k の方程式は,

$$y-\log k=\frac{1}{k}(x-k),\quad y=\frac{1}{k}x-1+\log k$$

$x=k\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，複号同順で

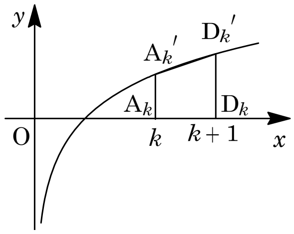
$$y=\frac{1}{k}\left(k\pm\frac{1}{2}\right)-1+\log k=\pm\frac{1}{2k}+\log k$$

よって，$B_k{}'\left(k-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2k}+\log k\right)$，$C_k{}'\left(k+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2k}+\log k\right)$ となる。

以上より，四角形 $B_kC_kC_k{}'B_k{}'$ の面積 S_k は,

$$S_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}+\log k+\frac{1}{2k}+\log k\right)\times 1=\log k$$

(2)　$k\geqq 2$ のとき，$S_k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ なので, (1)より，$\log k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ ………①



$k\geqq 1$ のとき，$D_k(k+1,\ 0)$，$D_k{}'(k+1,\ \log(k+1))$ とおくと，四角形 $A_kD_kD_k{}'A_k{}'$ の面積は,

$$\frac{1}{2}\left\{\log k+\log(k+1)\right\}\times 1=\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

さて，曲線 $y=\log x$ は上に凸であるので,

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$n\geqq 2$ のとき，まず，①より，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k>\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ となり,

$$\log 2+\log 3+\cdots+\log n=\log(n!)>\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$$

両辺から $\dfrac{1}{2}\log n$ を引いて,

$$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n>\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n$$

ここで，$y=\log x$ は増加関数なので，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx=\frac{1}{2}\log n$

よって，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n>0$ から，$a_n>\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx$ ………③

また，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx$ となり,

$$\frac{\log 1+\log 2}{2}+\cdots+\frac{\log(n-1)+\log n}{2}=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

よって，$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$ ………④

③④より，$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$ ………⑤

(4)　⑤より，$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n<\log(n!)<\int_{1}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{\frac{3}{2}}^{n}+\frac{1}{2}\log n\\&=n\log n-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}-n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)=U_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{1}^{n}+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1=V_n\end{aligned}$$

以上より，$U_n<\log(n!)<V_n$ が成立する。

［解 説］

凸関数の性質を利用した不等式の証明問題です。誘導が非常に丁寧です。