13　　　　［千葉大］

r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

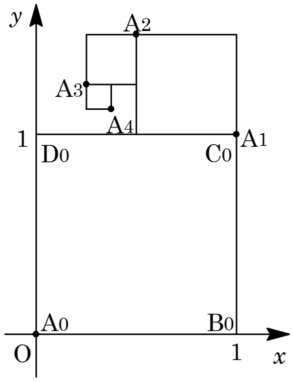
このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を r, n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ。

$\boxed{13}$ ［千葉大］



(1) 条件を図示すると，$\overrightarrow{A_0A_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_1A_2}=r(-1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_2A_3}=r^2(-1,\ -1)$，$\overrightarrow{A_3A_4}=r^3(1,\ -1)$ となるので，

$$\overrightarrow{A_0A_2}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=(1-r,\ 1+r)$$
$$\overrightarrow{A_0A_3}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$$
$$\overrightarrow{A_0A_4}=\overrightarrow{A_0A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$$

よって，$A_2(1-r,\ 1+r)$，$A_3(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$，$A_4(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$ である。

(2) $A_{4n}(x_n,\ y_n)$ とおくとき，(1)と同様にして，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_{4n+4}}-\overrightarrow{OA_{4n}}&=\overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}}+\overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}}+\overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}}+\overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}}\\&=(r^4)^n\overrightarrow{A_0A_1}+(r^4)^n\overrightarrow{A_1A_2}+(r^4)^n\overrightarrow{A_2A_3}+(r^4)^n\overrightarrow{A_3A_4}\\&=r^{4n}(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4})=r^{4n}\overrightarrow{A_0A_4}\end{aligned}$$

よって，$x_{n+1}-x_n=r^{4n}(1-r-r^2+r^3)$，$y_{n+1}-y_n=r^{4n}(1+r-r^2-r^3)$

(3) $p=1-r-r^2+r^3=(1-r)^2(1+r)$，$q=1+r-r^2-r^3=(1+r)^2(1-r)$ とおく。

すると，(2)より，$n\geqq 1$ において，

$$x_n=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}pr^{4k}=p\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k},\quad y_n=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}qr^{4k}=q\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}$$

ここで，$0<r<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}=\frac{1}{1-r^4}=\frac{1}{(1+r)(1-r)(1+r^2)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{p}{1-r^4}=\frac{1-r}{1+r^2},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{q}{1-r^4}=\frac{1+r}{1+r^2}$$

［解 説］

回転の行列を利用して，一般的に解くこともできますが，設問(2)を見て，(1)を延長した解答例を記しています。