27　　［京都大］

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

28　　［九州大・文］

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C:y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2)　(1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$）。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3)　$t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

29　　［一橋大］

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

30　［大阪大・文］

xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2)　$\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。

31　　　　［名古屋大・理］

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2)　b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

27 ［京都大］

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v \geqq 0 \text{………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6) \geqq 0$，$u^2-8 \leqq 0$，$-2\sqrt{2} \leqq u \leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$

$$=u^3-u^2-5u$$

$$z'=3u^2-2u-5$$

$$=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3$$

［解 説］

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

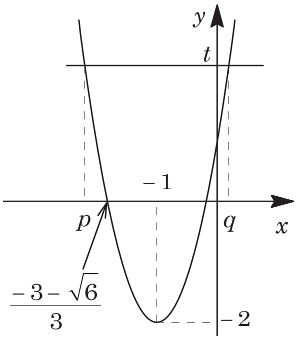
$\boxed{28}$　　［九州大・文］

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで，$t\geqq 0$ のとき，$f'(x)=t$ とすると，

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t \cdots\cdots\cdots ①$$



右図より，①は異なる 2 つの実数解をもつことより，接点が 2 個，すなわち接線が 2 本存在する。

(2)　①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので，

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$
$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より，$f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって，$\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり，$\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3)　$p\leqq\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として，$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで，$u=(p+1)^2$ とおくと，$p+1\leqq-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から，$u\geqq\dfrac{2}{3}$ となり，

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと，

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

すると，$g(u)$ の増減は右表のようになり，$u=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}$ で最小値 $\dfrac{50}{27}$ をとる。

さて，(2)より，$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので，PQ の最小値は，

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\dfrac{2}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

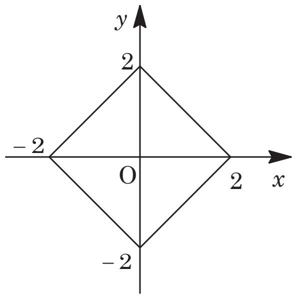
$u=\dfrac{5}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

［解 説］

(3)の変数の置き換えは，2 段階だったものを，まとめて記しています。

29　　　　［一橋大］

まず，方程式$|x|+|y|=2$ ……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$ ……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

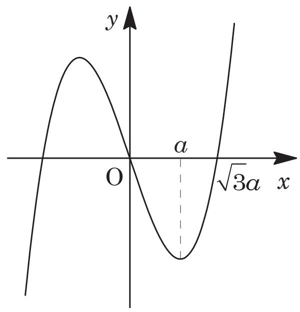
グラフが原点対称であることを考え，$x \geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は,

$$x^3-3a^2x=0,\ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2,\ x^3-(3a^2+1)x+2=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は$f(x)=0$となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1,\ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\frac{\sqrt{6}}{3}<a<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\frac{\sqrt{6}}{3}<a<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

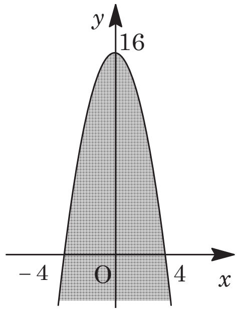
$0\leqq a<\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\frac{\sqrt{6}}{3}<a<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

［解 説］

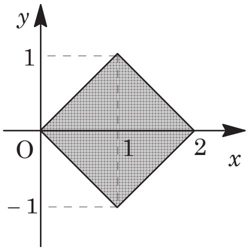
a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

$\boxed{30}$ ［大阪大・文］

(1) 領域 D は，放物線 $y=-x^2+16$ ……①の下部であり，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



領域 E は，中心が点$(1,\ 0)$である正方形$|x-1|+|y|=1$の内部であり，右下図の網点部となる。ただし，境界線は含む。



(2) 領域Dに点$\mathrm{A}(a,\ b)$が属するので，$b<-a^2+16$ ………②

さて，点$\mathrm{A}(a,\ b)$を通り傾きが$-2a$の直線の直線は，

$y-b=-2a(x-a)$，$y=-2ax+2a^2+b$ ………③

①③を連立して，$-x^2+16=-2ax+2a^2+b$

$x^2-2ax+2a^2+b-16=0$

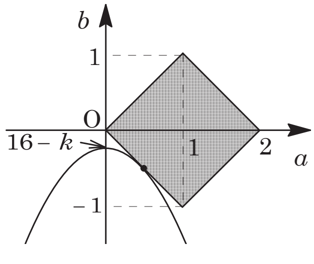
②より，異なる実数解をもち，$x=a\pm\sqrt{-a^2-b+16}$

この解を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，①③で囲まれた部分の面積$S(a,\ b)$は，

$$S(a,\ b)=\int_\alpha^\beta-(x^2-2ax+2a^2+b-16)\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3$$

(3) 点$\mathrm{A}(a,\ b)$が領域Eを動くとき，$|a-1|+|b|\leqq 1$ ………④

また，(2)より，$-a^2-b+16=k$ ……⑤とおくと，$S(a,\ b)=\frac{4}{3}(\sqrt{k})^3$となり，$k$が最大となるとき，$S(a,\ b)$は最大値をとる。そこで，$ab$ 平面上において，④と⑤が共有点をもつkの最大値を求める。



さて，⑤から$b=-a^2+16-k$ ……⑥となり，④の境界線$b=-a$と接するのは，⑥から$b'=-2a$となるので，

$-2a=-1$，$a=\frac{1}{2}$

このとき，$b=-\frac{1}{2}$となり，$16-k\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$k\leqq 16+\frac{1}{4}=\frac{65}{4}$

以上より，$k=\frac{65}{4}$のとき，$S(a,\ b)$は最大値$\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{65}{4}}\right)^3=\frac{65}{6}\sqrt{65}$をとる。

［解 説］

領域が絡んだ微積分の標準レベルの総合問題です。

31　　[名古屋大・理]

(1)　$C: y=x^3-a^2x$ ……①に対して，$y'=3x^2-a^2$ となり，点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t)\ ,\ \ y=(3t^2-a^2)x-2t^3 \cdots\cdots\cdots③$$

①②を連立して，$x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0\ ,\ \ (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって，$x=t,\ -2t$ となり，$t\neq 0$ から, l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)\,dt\right|=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x-t+3t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{-2t}^{t}\left\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\right\}dt\right|=\left|\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}\right|$$

$$=\left|-\frac{81}{4}t^4+27t^4\right|=\frac{27}{4}t^4$$

(2)　接線 l が点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通る条件は,

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3\ ,\ \ -2t^3+6at^2-2a^3=b\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$f(t)=-2t^3+6at^2-2a^3$ とおくと,

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

さて, 曲線 C には異なる 2 点で接する接線が存在しないので, ④の実数解の個数は接線の本数と等しい。

よって, 接線の本数は, $-2a^3<b<6a^3$ のとき 3 本, $b=-2a^3,\ 6a^3$ のとき 2 本, $b<-2a^3,\ 6a^3<b$ のとき 1 本である。

(3)　(i)　$b=-2a^3$ のとき

④より，$-2t^3+6at^2=0$ となり，$t=0,\ 3a$

すると，$t=0$ のとき接線 l は原点を通るので不適である。

(ii)　$b=6a^3$ のとき

④より，$-2t^3+6at^2-8a^3=0$ となり，$(t-2a)^2(t+a)=0$

(1)より，l と C で囲まれた図形の面積は，$t=2a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(2a)^4=16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$ であり，$t=-a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(-a)^4=\dfrac{27}{4}a^4$ となる。

すると，$S_1\geqq S_2$ から，$S_1=16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$，$S_2=\dfrac{27}{4}a^4$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=16$ である。

[解　説]

次の課程では，文理共通範囲で頻出と思われる典型題の集まりです。