$\boxed{27}$ ［神戸大］

座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。

28　　　　［東京大・文］

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

29　　　　［東北大・理］

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s，t が $s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。s，t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

30　　［千葉大］

1より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

27 ［神戸大］

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l : x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1| \geqq |(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l : y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\quad |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

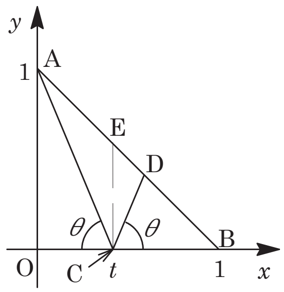
$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

$\boxed{28}$ ［東京大・文］

まず，直線 AB の方程式は，$y=1-x$ ………①



そこで，点 C を通り，x 軸に垂直な直線と直線 AB との交点を E とすると，

$$CE=1-t$$

また，$\angle ACO=\angle BCD=\theta$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ より，直線 CD の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\text{ ………②}$$

①②を連立して，$1-x=\dfrac{1}{t}(x-t)$ から，$t-tx=x-t$，$(t+1)x=2t$

よって，点 D の x 座標は，$x=\dfrac{2t}{t+1}$ となる。

すると，△ACD の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{t+1}=\dfrac{-t^2+t}{t+1}$

ここで，$u=t+1$ とおくと，$0<t<1$ から $1<u<2$ となり，

$$S=\frac{-(u-1)^2+u-1}{u}=\frac{-u^2+3u-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

さて，相加平均と相乗平均の関係より，$u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{2}$

等号は，$u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ のとき成立し，これは $1<u<2$ を満たすことより，

$$S=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)\leqq 3-2\sqrt{2}$$

以上より，△ACD の面積の最大値は，$3-2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

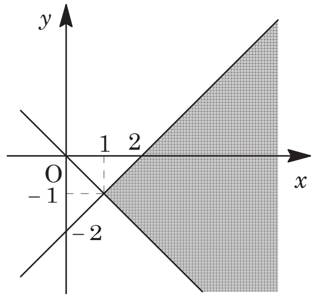
分数関数の最大・最小は，微分法を利用するのが一般的ですが，範囲外です。このようなときは，次に相加平均と相乗平均の関係が使えないかと考えます。

$\boxed{29}$ ［東北大・理］

(1)　条件から，$x=s+t+1$ ……①，$y=s-t-1$ ……②に対して，①②より，

$$2s=x+y\,,\ s=\frac{1}{2}(x+y)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$$2t+2=x-y\,,\ t=\frac{1}{2}(x-y-2)\ \cdots\cdots\cdots ④$$



$s\geqq 0,\ t\geqq 0$ から，③④より，

$$x+y\geqq 0\,,\ x-y-2\geqq 0$$

すると，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2)　条件から，$x=st+s-t+1$ ……⑤，$y=s+t-1$ ……⑥に対して，

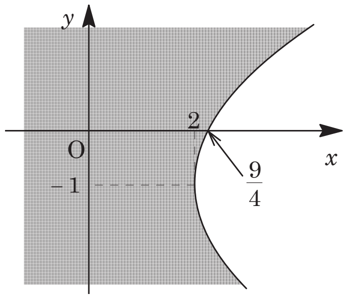
⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$ …………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式 $u^2-(y+1)u+x-2=0$ の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$$



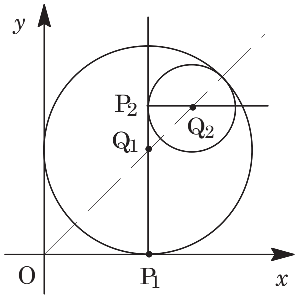
$s,\ t$ が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

［解 説］

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

$\boxed{30}$ ［千葉大］

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。



ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は，

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

(2)　(1)より，$P_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$Q_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 P_1Q_1 は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 P_1Q_1 と接することより，

$$\left|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})\right|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ が接するので，

$$\left|(1-a_n)-(1-a_{n-1})\right|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

［解 説］

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。