$\boxed{29}$　［千葉大・医］

さいころを n 回$(n \geqq 2)$投げ，k 回目$(1 \leqq k \leqq n)$に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

30　　　　［広島大・文］

N は 4 以上の整数とする。次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる。

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げる回数は，最大で何回か。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ。

(5)　$N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ。

31　　　　［名古屋大］

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

$\boxed{32}$ ［東北大］

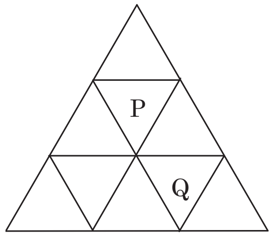
袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。$X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。

33　［東京大］

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



$\boxed{34}$ ［京都大・理］

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。さらに

$$Y_1=X_1,\ Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

29　　［千葉大・医］

(1)　積 X_1X_2 が 18 より大となるのは，$X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5),\ (6,\ 6)$ である。また，$X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)$，$X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって，積 X_1X_2 が 18 以下である確率は，$1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ から，偶数である確率は，

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数でない偶数であるのは，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より，その確率は，${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。よって，積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4)　さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ $R_0,\ R_1,\ R_2$ とおくと，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて，2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ のうち，R_1 が n 回，または R_1 が $n-2$ 回で R_2 が 2 回，または R_1 が $n-4$ 回で R_2 が 4 回，……という場合がある。その確率は, n を偶奇で分けると,

(i)　n が偶数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii)　n が奇数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

さて，二項定理を用いて,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　n が偶数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n) = 2^n$，${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}$

(ii)　n が奇数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}) = 2^n$，${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = 2^{n-1}$

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，求める確率は，$2^{n-1} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ である。

［解 説］

確率の頻出問題です。(4)は，積が R_1 となるのは，R_0 が 0 回で，R_2 が 0 または偶数回という意味です。

30　　［広島大・文］

(1)　$N \geqq 4$ より，さいころを投げる回数が最大となるのは，偶数 2 回，奇数 $N-1$ 回出た後，もう 1 回投げる場合より，$2+(N-1)+1=N+2$ 回である。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する場合は，偶数が 3 回出たときより，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する場合は，奇数が N 回出たか，$N-1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-3$ 回出て N 回目に偶数が出たときより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left\{1+\frac{(N-1)(N-2)}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
$$=(N^2-3N+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する場合は，

(i)　奇数が N 回出たとき

(ii)　N 回目までに偶数 1 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出たとき

(iii)　$N+1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出たとき

(i)〜(iii)より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\left\{1+\frac{N}{2}+\frac{(N+1)N}{8}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N=(N^2+5N+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+3}$$

(5)　$N=4$ のとき, (1)より，さいころを投げる回数は最大 6 回となる。

(i)　3 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (2)より $\dfrac{1}{8}$

(ii)　4 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (3)より $(16-12+4)\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{4}$

(iii)　5 回投げて操作を終了する場合

4 回目までに偶数 1 回奇数 3 回出て 5 回目に奇数が出たか，4 回目までに偶数 2 回奇数 2 回出て 5 回目に偶数が出たときより，その確率は，

$$_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

(iv)　6 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (1)より，${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\dfrac{5}{16}$

(i)〜(iv)より，さいころを投げる回数の期待値は，

$$3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{16}+6\times\frac{5}{16}=\frac{77}{16}$$

［解 説］

題意を数式化するのときに細心の注意が要求される確率の問題です。

31　　　　［名古屋大］

(1)　n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X$かつ$Y \leqq j+k)$は，

$$P(j \leqq X\text{かつ}Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2)　「$X=j$ かつ $Y=j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または$Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X\text{かつ}Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X\text{かつ}Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\ P(j+1 \leqq X\text{かつ}Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率$P(j=X$かつ$Y=j+k)$は，

$$P(j \leqq X\text{かつ}Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X\text{または}Y \leqq j+k-1)$$

$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3)　(2)より，$X=j$ かつ $Y=j+s$　$(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，$Y-X=s$となる確率$P(s)$は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2-ns)$$

(4)　(3)より，$P(s) = -\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s=\dfrac{n}{2}$ のとき$P(s)$は最大となる。

［解　説］

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

32　　［東北大］

(1)　与えられた試行に対して，A から取り出した数字と，B から取り出した数字が一致する回数を X とし，$X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより，$P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので，$P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより，$P(2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより，$P(1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって，X の期待値は，$4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2)　与えられた試行に対して，カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$，一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1=q_2=0$

$n\geqq 3$ のときは，k 回目 $(1\leqq k\leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$，一致しない確率は $\dfrac{1}{2}$ なので，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n-2}p_k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k}\cdot\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

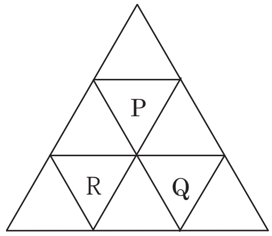
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

［解　説］

頻出ですが，(2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

$\boxed{33}$　［東京大］



まず，部屋Rを右図のように決め，球がn秒後にP, Q, Rにある確率を，それぞれp_n，q_n，r_nとおく。

さて，球はPより出発し，1秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後にはP, Q, R以外の部屋，偶数秒後にはP, Q, Rのいずれかの部屋にある。

これより，kを1以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が$2k$秒後に部屋P, Q, Rのいずれかにあり，$2k+2$秒後に部屋Qに移動する確率は，

(i)　部屋Pにあるとき　P→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋Qにあるとき　Q→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

(iii)　部屋Rにあるとき　R→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, Rの対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\ \ q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$となり，$q_0=0$に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_{2k}-\frac{1}{3}\right),\ \ q_{2k}-\frac{1}{3}=\left(q_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，nが奇数のとき$q_n=0$，nが偶数のとき$q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

34　　［京都大・理］

まず，$Y_1=X_1$，$Y_n=X_n+\dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，帰納的に $Y_n\geqq 1$ である。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ である条件は，$\dfrac{5}{4}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}<1+\sqrt{3}<3$ に注目すると，$X_n=1$ または $X_n=2$ の場合についてだけ考えればよい。

(i)　$X_n=1$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 1+\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ から，右側の不等式は成立し，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\leqq\dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，

$$Y_{n-1}\leqq\frac{2}{-1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

(ii)　$X_n=2$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 2+\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ から，左側の不等式は成立し，$\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq -1+\sqrt{3}$ から，

$$Y_{n-1}\geqq\frac{1}{-1+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_{n-1}\leqq 1+\sqrt{3}$ では $X_n=1$ または $X_n=2$，$Y_{n-1}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ では $X_n=1$ だけ，$Y_{n-1}>1+\sqrt{3}$ では $X_n=2$ だけである。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$，$Y_n<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$Y_n>1+\sqrt{3}$ となる確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，

$$p_n=\frac{2}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}(q_{n-1}+r_{n-1})$$

$p_n+q_n+r_n=1$ から，$p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{6}(1-p_{n-1})=\dfrac{1}{6}p_{n-1}+\dfrac{1}{6}$ となり，

$$p_n-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\Big(p_{n-1}-\frac{1}{5}\Big)=\Big(p_1-\frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_1\leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$Y_1=X_1=2$ から $p_1=\dfrac{1}{6}$ であり，

$$p_n=\frac{1}{5}+\Big(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n}$$

［解 説］

上の解答例には記していませんが，最初，題意をつかむために実験をしています。もつれた糸を解きほぐすように計算をすすめたところ，予想を超える簡明な結論が導けました。おもしろい問題です。