37 ［東京工大］

実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

38　　［一橋大］

1 つの角が120°の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x<y<z$ を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$ を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ。

39　　［千葉大・医］

　すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\ \ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1)　数列$\{a_n\}$が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　数列$\{b_n\}$が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。

40　　［京都大・理］

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。
このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

41　　［東京大・理］

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

42　　［熊本大・医］

$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおく。$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

43　　［岡山大・理］

$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2)　$0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。

$\boxed{37}$ ［東京工大］

正の整数 n, k に対して，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ のとき，$[\sqrt{n}\,] = k$ となる。

さて，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ の区間にある k の倍数は，k^2，$k(k+1)$ 以外を調べると，

$$k(k+2)-(k+1)^2 = -1 < 0,\ k(k+2) < (k+1)^2$$

$$k(k+3)-(k+1)^2 = k-1 \geqq 0,\ (k+1)^2 \leqq k(k+3)$$

これより，k^2，$k(k+1)$，$k(k+2)$ の 3 個となる。

すると，10000 以下の整数 n で，$[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるのは，$10000 = 100^2$ に注目すると，$1^2 \leqq n < 2^2$，$2^2 \leqq n < 3^2$，…，$99^2 \leqq n < 100^2$ の各区間に 3 個ずつあり，これに 10000 も加えて，合わせて，$3 \times 99 + 1 = 298$ 個存在する。

［解 説］

読解力の問題です。最初は実験をして，考え方を整理しました。ただ，結論は意外なほどシンプルなものでした。

38　　[一橋大]

(1)　3 辺の長さが $x,\ y,\ z\ (x<y<z)$ で 1 つの角が $120°$ の三角形は，最大辺の対角が $120°$ となるので，余弦定理より，

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos120°,\ z^2=x^2+y^2+xy\ \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$x+y-z=2$ から，$z=x+y-2\ \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$(x+y-2)^2=x^2+y^2+xy,\ xy-4x-4y+4=0$

ここで，x, y, z は正の整数から，$(x-4)(y-4)=12$

$-4<x-4<y-4$ より，$(x-4,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$，

$$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (6,\ 10),\ (7,\ 8)$$

よって，②より，$(x,\ y,\ z)=(5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)$

(2)　条件より，$x+y-z=3$ から，$z=x+y-3\ \cdots\cdots\cdots ③$

①③より，$(x+y-3)^2=x^2+y^2+xy,\ xy-6x-6y+9=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-6)(y-6)=27$

$-6<x-6<y-6$ より，$(x-6,\ y-6)=(1,\ 27),\ (3,\ 9)$，

$$(x,\ y)=(7,\ 33),\ (9,\ 15)$$

よって，③より，$(x,\ y,\ z)=(7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)$

(3)　条件より，$x+y-z=2^a3^b$ から，$z=x+y-2^a3^b\ \cdots\cdots\cdots ④$

①④より，$(x+y-2^a3^b)^2=x^2+y^2+xy,\ xy-2^{a+1}3^bx-2^{a+1}3^by+2^{2a}3^{2b}=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$

さて，$x<y<z$ から，④に代入すると，$2^a3^b<x<y$ となり，

$$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b<0$ と仮定すると，

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)<(2^a3^b)^2=2^{2a}3^{2b}$$

すると，$2^{2a}3^{2b}<2^{2a}3^{2b+1}$ から，⑤を満たす x, y は存在しない。

よって，$2^{2a}3^{2b+1}$ の約数 $x-2^{a+1}3^b,\ y-2^{a+1}3^b$ はともに正となる。

一方，$2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数は，$(2a+1)(2b+2)$ であり，$2^{2a}3^{2b+1}$ は平方数でないので，$x-2^{a+1}3^b=y-2^{a+1}3^b$ の場合はありえない。

これから，⑤⑥を満たす $(x,\ y)$ の個数は，$\dfrac{1}{2}(2a+1)(2b+2)=(2a+1)(b+1)$ となる。すなわち，①④を満たす $(x,\ y,\ z)$ の個数は，$(2a+1)(b+1)$ である。

[解 説]

(1)(2)は頻出タイプの問題ですが，それを一般化した(3)は，論理をつめるのに時間がかかります。

$\boxed{39}$　　［千葉大・医］

(1)　まず，$a_n = p+qn+rn^2$ に対し，数列$\{a_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$a_1 = p+q+r$ が整数であり，しかも $a_{n+1}-a_n$ が整数であることより，

$$a_{n+1}-a_n = \{p+q(n+1)+r(n+1)^2\}-(p+qn+rn^2) = (q+r)+2rn$$

これより，数列$\{a_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$p+q+r$ と $q+r$ と $2r$ が整数，すなわち p と $q+r$ と $2r$ が整数となることである。

よって，数列$\{a_n\}$が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　$b_n = p+qn+rn^2+sn^3$ に対し，数列$\{b_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$b_1 = p+q+r+s$ が整数であり，しかも $b_{n+1}-b_n$ が整数である。

ここで，$c_n = b_{n+1}-b_n$ とおくと，

$$\begin{aligned} c_n &= \{p+q(n+1)+r(n+1)^2+s(n+1)^3\}-(p+qn+rn^2+sn^3) \\ &= (q+r+s)+(2r+3s)n+3sn^2 \end{aligned}$$

(1)の結果を利用すると，数列$\{c_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$q+r+s$ と $2r+3s+3s = 2r+6s$ と $2\cdot 3s = 6s$ が整数となることである。

よって，数列$\{b_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$p+q+r+s$ と $q+r+s$ と $2r+6s$ と $6s$ が整数，すなわち p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ が整数となることである。

［解　説］

整数と整式の有名問題ですが，次数下げの方法を知らないとかなり面倒です。(1)は(2)での利用を考えて必要十分条件を求めています。

40　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p},\ q^3=2p^3 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると, q は2の倍数となり, k を自然数として, $q=2k \cdots\cdots\cdots ②$

②を①に代入すると, $8k^3=2p^3$, $p^3=4k^3$

すると, p も2の倍数となり, p, q が互いに素であることに反する。

よって, $\sqrt[3]{2}$ が有理数でない, すなわち無理数である。

(2)　有理数を係数とする多項式 $P(x)$ を, x^3-2 で割った商を $Q(x)$ とし, 余りを ax^2+bx+c （a, b, c は有理数）とおくと,

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $\alpha=\sqrt[3]{2}$ とすると, 条件より $P(\alpha)=0$ なので, $a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots\cdots ④$

次に, x^3-2 を ax^2+bx+c で割ると, $a\neq 0$ のとき,

$$x^3-2=(ax^2+bx+c)\left(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^2}\right)+\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)x+\left(-2+\frac{bc}{a^2}\right) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤に $x=\alpha$ を代入すると, ④より, $\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)\alpha+\left(-2+\frac{bc}{a^2}\right)=0$

a, b, c は有理数であり, (1)から α は無理数なので,

$$-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}=0 \cdots\cdots\cdots ⑥,\ -2+\frac{bc}{a^2}=0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥より, $c=\frac{b^2}{a}$ となり, ⑦に代入すると, $\left(\frac{b}{a}\right)^3=2$ から, $\frac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$

ところが, 左辺が有理数, 右辺が無理数なので, 成立しない。

よって, $a=0 \cdots\cdots ⑧$ である。

すると, ④より $b\alpha+c=0$ となり, b, c は有理数, α は無理数なので,

$$b=c=0 \cdots\cdots ⑨$$

⑧⑨を③に代入すると, $P(x)=(x^3-2)Q(x)$

したがって, $P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。

［解　説］

(1)は有名問題。(2)はこの結論を利用するのですが, 一筋縄ではいきません。

41　　　　［東京大・理］

(1)　$k,\ l,\ n$ を，$k \geqq 1,\ l \geqq 1,\ n \geqq 2$ を満たす整数として，$k(k+1)=l^n$ ……①と仮定すると，$k,\ k+1$ のいずれも l^n の約数となる。

さて，$(k+1)-k=1$ より，$k,\ k+1$ は互いに素なので，$a,\ b$ を正の整数として，

$$k=a^n,\ k+1=b^n$$

k を消去すると，

$$b^n-a^n=1,\ (b-a)(b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=1$$

すると，$b-a>0$ から，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1}=1$ ………②

ところが，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1} \geqq n \geqq 2$ となり，②は成立しない。すなわち，①を満たす $k,\ l,\ n$ は存在しない。

よって，連続する2個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2)　$k,\ l,\ n$ を，$k \geqq 1,\ l \geqq 1,\ n \geqq 3$ を満たす整数として，次式を仮定すると，

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)=l^n \text{ ………③}$$

ここで，$k<k+1<k+2<\cdots<k+n-1$ から，

$$k^n<l^n<(k+n-1)^n,\ k<l<k+n-1$$

これより，l は $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n-2$ のいずれかと等しくなる。

そこで，p を $1 \leqq p \leqq n-2$ を満たす整数として，$l=k+p$ とおくと，③は，

$$k(k+1)\cdots(k+p)\cdots(k+n-1)=(k+p)^n$$

$$k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p+1)\cdots(k+n-1)=(k+p)^{n-1} \text{ ………④}$$

ところが，$k+p+1$ は $k+p$ と互いに素であり，$(k+p)^{n-1}$ の約数とはならないので，④は成立しない。すなわち，③を満たす $k,\ l,\ n$ は存在しない。

よって，$n \geqq 3$ のとき，連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(1)より，$n=2$ のときも合わせて，連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

［解　説］

(2)は，(1)との関連から数学的帰納法による証明と思い込みましたが，うまくいきません。そのため，軌道修正にたいへんな時間を費やしてしまいました。

$\boxed{42}$　　［熊本大・医］

(1)　a_1，a_2，$\cdots$，a_n が，$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して，数列 $\{a_k\}$ 全体は，

$$ {}_nC_4=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)\ \text{（通り）} $$

(2)　$b_k=a_1a_2\cdots a_k$ より，a_1，a_2，$\cdots$，a_k の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k=-1$，それ以外は $b_k=1$ である。

すなわち，$1\leqq p<q<r<s\leqq n$ として，$a_p=a_q=a_r=a_s=-1$ とすると，

$$ b_p=b_r=-1,\ b_q=b_s=1 $$

さて，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=-1$ となる k が 2 個，$b_k=1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $q=p+1$，$s=r+1$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n=(-1)\cdot2+1\cdot(n-2)=n-4 $$

また，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=1$ となる k が 2 個，$b_k=-1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $p=1$，$r=q+1$，$s=n$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n=1\cdot2+(-1)\cdot(n-2)=-n+4 $$

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-2}C_2=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\ \text{（通り）} $$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-3}C_1=n-3\ \text{（通り）} $$

［解 説］

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力，さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。

$\boxed{43}$　　［岡山大・理］

(1)　$f(x)=4x(1-x)$ に対して，条件より，

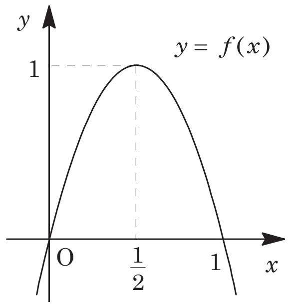
$$f_2(x)=f_1(f(x))=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))$$

すると，$f_2(x)=0$ の解は，

(i)　$f(x)=0$ のとき　$x=0,\ 1$

(ii)　$f(x)=1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$



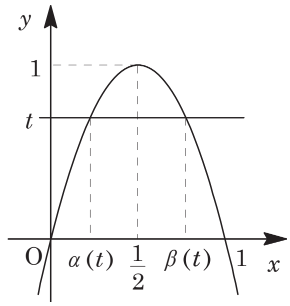
(2)　$0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対して，$f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$　$(\alpha(t)<\beta(t))$ とすると，

$$0\leqq\alpha(t)<\frac{1}{2}<\beta(t)\leqq 1$$

さて，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))$ より，$0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たす c に対して，

$$f_{n+1}(\alpha(c))=f_n(f(\alpha(c)))=f_n(c)=0$$
$$f_{n+1}(\beta(c))=f_n(f(\beta(c)))=f_n(c)=0$$

よって，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解である。



(3)　まず，$x=0,\ 1$ が $f_n(x)=0$ の解であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=4x(1-x)$ より，$x=0,\ 1$ は $f_1(x)=0$ の解である。

(ii)　$n=k$ のとき　$x=0,\ 1$ が $f_k(x)=0$ の解であると仮定すると，

$$f_{k+1}(0)=f_k(f(0))=f_k(0)=0,\quad f_{k+1}(1)=f_k(f(1))=f_k(0)=0$$

$x=0,\ 1$ は $f_{k+1}(x)=0$ の解である。

(i)(ii)より，$x=0,\ 1$ は，ともに $f_n(x)=0$ の解である。

さて，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，$f_n(x)=0$ の異なる S_n 個の解を，

$$0=c_1<c_2<c_3<\cdots<c_{S_n-1}<c_{S_n}=1$$

すると，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))=0$ の解は，$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1},\ c_{S_n}$ より求めることができる。

(a)　$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1}$ のとき

(2)より，$\alpha(c_i)$，$\beta(c_i)$　$(1\leqq i\leqq S_n-1)$ は，$f_{n+1}(x)=0$ の異なる解となり，その個数は $2(S_n-1)$ である。ただし，$0\leqq\alpha(c_i)<\dfrac{1}{2}<\beta(c_i)\leqq 1$ である。

(b)　$f(x)=c_{S_n}$ のとき

$f(x)=1$ より $x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1}{2}$ が $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(a)(b)より，$f_n(x)=0$ の異なる解の個数 S_n について，$S_1=2$ で，

$$S_{n+1}=2(S_n-1)+1,\quad S_{n+1}=2S_n-1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)を $S_{n+1}-1=2(S_n-1)$ と変形すると，$S_n-1=(S_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，

$$S_n=2^{n-1}+1$$

［解 説］

合成関数の解の個数を題材としたおもしろい問題です。(1)と(2)が秀逸な誘導となっています。$n=1,\ 2,\ 3$ と具体的に考えて方針を立てましたが，解答例の記述には，かなり難航しました。