$\boxed{25}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・文］

平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を満たすとする。ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p，q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおく。このとき，次の条件 $|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$ を満たす実数 p, q を求めよ。

(2)　平面上のベクトル $\vec{x}$ が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$ を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

26　［京都大］

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

$\boxed{27}$ ［一橋大］

xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1) P$(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に，4 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 1)$，D$(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点$(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{25}$　　［東北大・文］

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$より，

$$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=p^2-pq+q^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\frac{1}{2}q$$

すると，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$から，$p^2-pq+q^2=1$……①，$p-\dfrac{1}{2}q=0$……②

①②より，$p^2-2p^2+4p^2=1$，$p^2=\dfrac{1}{3}$となり，$p>0$から，

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

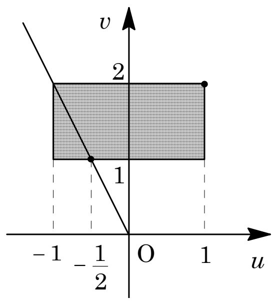
(2)　$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{x}=s-\dfrac{1}{2}t$，$\vec{b}\cdot\vec{x}=-\dfrac{1}{2}s+t$となる。

条件から，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$なので，

$$-1\leqq s-\frac{1}{2}t\leqq1\ \cdots\cdots\text{①},\ 1\leqq-\frac{1}{2}s+t\leqq2\ \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$u=s-\dfrac{1}{2}t$，$v=-\dfrac{1}{2}s+t$とおくと，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$，$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$

①②より，$-1\leqq u\leqq1$，$1\leqq v\leqq2$………③



さて，$|\vec{x}|^2=s^2-st+t^2$なので，

$$|\vec{x}|^2=\frac{4}{9}\{(2u+v)^2-(2u+v)(u+2v)+(u+2v)^2\}$$

$$=\frac{4}{3}(u^2+uv+v^2)$$

すると，③は右図の網点部となるので，$(u,\ v)=(1,\ 2)$のとき，$|\vec{x}|^2$は最大値$\dfrac{4}{3}(1+2+4)=\dfrac{28}{3}$をとる。

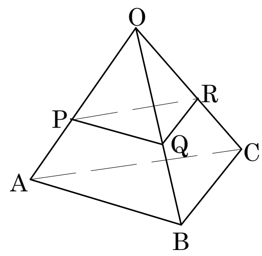
また，$|\vec{x}|^2=\dfrac{4}{3}\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+v^2$から，$v$ をいったん固定すると，$|\vec{x}|^2$が最小となるのは，$u=-\dfrac{1}{2}v$ $(v=-2u)$ のときであり，この関係を満たしながら，$1\leqq v\leqq2$で v を変化させると，$(u,\ v)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$で最小値1をとる。

以上より，$1\leqq|\vec{x}|^2\leqq\dfrac{28}{3}$となり，$1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$である。

［解 説］

成分表示を用いるか，そのまま 1 次結合で計算を進めるかを迷いましたが，後者の立場で記しました。なお，(2)の u，v への置き換えは，1 文字固定という方法で最大・最小を求めるときに，領域を長方形にしてわかりやすくするためです。

$\boxed{26}$ ［京都大］



正四面体 OABC において $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ から，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\text{………②}$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC}$ とおくと，△PQR が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{OA}-q\overrightarrow{OB}|=|q\overrightarrow{OB}-r\overrightarrow{OC}|=|r\overrightarrow{OC}-p\overrightarrow{OA}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\text{………④}$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)～(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{PQ}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{QR}=p\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{RP}=p\overrightarrow{CA}$$

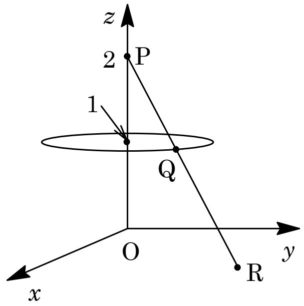
よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

［解　説］

ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

$\boxed{27}$　　　　［一橋大］

(1)　P(0, 0, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$s^2+t^2=1$ ………①



また，線分 PR の中点が Q より，

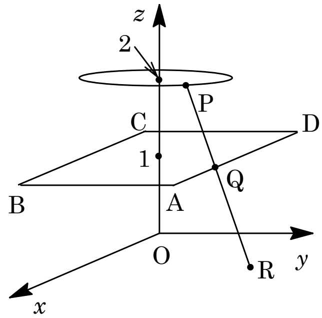
$\dfrac{x}{2}=s$ ………②，$\dfrac{y}{2}=t$ ………③

②③を①に代入すると，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ から，

$x^2+y^2=4$

よって，点 R の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=4$，$z=0$

(2)　P(p, q, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$p^2+q^2=1$ ………④



また，線分 PR の中点が Q より，

$\dfrac{x+p}{2}=s$ ………⑤，$\dfrac{y+q}{2}=t$ ………⑥

⑤⑥より，$p=2s-x$，$q=2t-y$

④に代入すると，$(2s-x)^2+(2t-y)^2=1$

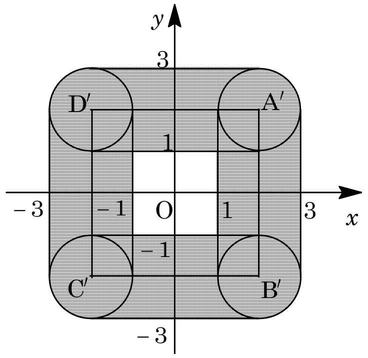
$(x-2s)^2+(y-2t)^2=1$ ………⑦

さて，点 Q が辺 AB 上にあるとき，

$s=1$，$-1\leqq t\leqq 1$

⑦より，$(x-2)^2+(y-2t)^2=1$ となり，点 R は xy 平面上で，中心 $(2,\ 2t,\ 0)$，半径 1 の円を描く。なお，$-2\leqq 2t\leqq 2$ より，中心は点 A$'$(2, 2, 0) と B$'$(2, −2, 0) を結ぶ線分上にある。

さらに，点 C$'$(−2, −2, 0)，D$'$(−2, 2, 0) とおき，同様に考えると，Q が正方形 ABCD の辺上を動くとき，点 R は中心が正方形 A$'$B$'$C$'$D$'$ の辺上で半径が 1 の円周上を動く。



すると，点 R の動きうる領域は右図の網点部となり，その面積を S とすると，

$$S=4\left\{3^2-1^2-\left(1^2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=28+\pi$$

［解　説］

20 年前に，よく見かけた問題です。(2)は，まず Q を固定して R の変化をとらえ，その状態を保ったまま Q を動かすという手法です。