$\boxed{25}$ ［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。

26 ［千葉大］

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点$(1,\ 0)$に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点$(0,\ 1)$まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点$(x,\ y)$が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1)　$f(x)$を x の式で表せ。

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{27}$ ［東京医歯大］

$a^2+b^2=1$を満たす正の実数 a, b の組$(a,\ b)$の全体を S とする。S に含まれる$(a,\ b)$に対し，xyz 空間内に 3 点$\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_1とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_1の体積の最大値を求めよ。

(2)　三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_2とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3)　三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_3とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_3の体積の最大値を求めよ。

28　　　　［大阪大］

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=\cos\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

29　　[東京工大]

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

$\boxed{25}$ ［千葉大］

(1)　$a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ より，

$$\int_a^b \Big(\frac{a+b}{2}-x\Big)f''(x)\,dx=\Big[\Big(\frac{a+b}{2}-x\Big)f'(x)\Big]_a^b-\int_a^b -f'(x)\,dx$$
$$=\frac{a-b}{2}f'(b)-\frac{b-a}{2}f'(a)+\Big[f(x)\Big]_a^b$$
$$=f(b)-f(a)$$

(2)　車が時刻 0 で発進後，時刻 t での位置を $x(t)$ とすると，$0<T$ に対して，

$$L=\Big|\int_0^T x'(t)\,dt\Big|=\big|x(T)-x(0)\big|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，条件より，$x'(0)=x'(T)=0$ なので, (1)から，

$$x(T)-x(0)=\int_0^T \Big(\frac{T}{2}-t\Big)x''(t)\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\big|x''(t)\big|<\dfrac{4L}{T^2}$ と仮定すると，①②より，

$$L=\Big|\int_0^T \Big(\frac{T}{2}-t\Big)x''(t)\,dt\Big|\leqq\int_0^T \Big|\Big(\frac{T}{2}-t\Big)x''(t)\Big|dt=\int_0^T \Big|\frac{T}{2}-t\Big|\big|x''(t)\big|dt$$
$$<\frac{4L}{T^2}\int_0^T \Big|\frac{T}{2}-t\Big|dt=\frac{4L}{T^2}\Big(\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{8}\Big)=L$$

すると，$L<L$ となり成立しない。

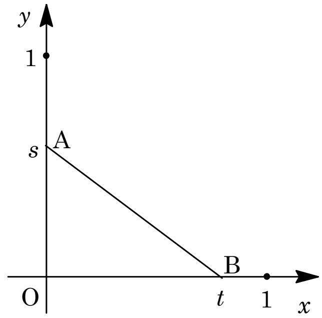
よって，この車の加速度の絶対値$\big|x''(t)\big|$は，ある瞬間に$\dfrac{4L}{T^2}$以上である。

［解 説］

速度，加速度が題材になっているユニークな問題です。(1)の結論を利用すると，(2)の背理法へとスムーズに繋がります。なお，定積分の計算は，記述を省略しましたが，面積を対応させて値を求めています。

$\boxed{26}$ ［千葉大］

(1)　$A(0,\ s)$，$B(t,\ 0)$ とおくと，線分 AB の方程式は，$0 \leqq x \leqq t$ として，



$$\frac{x}{t}+\frac{y}{s}=1,\quad y=s\left(1-\frac{x}{t}\right) \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$s^2+t^2=1 \quad (s>0,\ t>0) \cdots\cdots\cdots ②$

②より，$s=\sqrt{1-t^2}$ となり，①に代入すると，

$$y=\sqrt{1-t^2}\left(1-\frac{x}{t}\right) \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，x の値を固定し，$x \leqq t < 1$ において，t の値を変化させると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\left(1-\frac{x}{t}\right)+\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{x}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2(t-x)+x(1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\frac{-(t^3-x)}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

t	x	$\cdots$	$\sqrt[3]{x}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

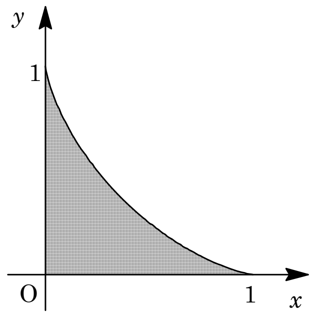
これより, y の値の増減は右表のようになる。

すると，$t=\sqrt[3]{x}$ において y は最大となり，その最大値 $f(x)$ は,

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

なお，$s=0$ のときは線分 $AB: y=0 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$，$t=0$ のときは線分 $AB: x=0 \quad (0 \leqq y \leqq 1)$ となり，$f(x)$ は成立している。

(2)　領域 D は右図の網点部となり，これを x 軸を中心に回転させた立体の体積 V は,



$$V=\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

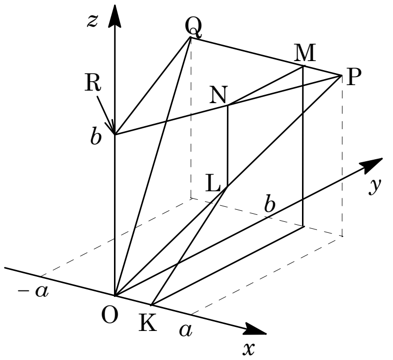
$$=\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\pi$$

［解 説］

アステロイドの出現する有名な問題です。1 文字 x を固定して，y のとる値の範囲を求めています。

$\boxed{27}$ ［東京医歯大］

(1) △OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_1 を，点 $\mathrm{K}(k,\ 0,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし，yz 平面に関する対称性より，$0 \leqq k \leqq a$ とする。



ここで，辺 OP と平面 $x=k$ との交点を L とおくと，点 L は線分 OP を $k:a-k$ に内分することより，$\mathrm{L}\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ \dfrac{b}{a}k\right)$ となる。

また，辺 PQ と平面 $x=k$ との交点を M とおくと，$\mathrm{M}(k,\ b,\ b)$ である。

これより，切り口は外径 KM，内径 KL のドーナツ形となり，その面積 $S_1(k)$ は，

$$S_1(k)=\pi(\mathrm{KM}^2-\mathrm{KL}^2)=\pi\left\{(b^2+b^2)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}=\frac{2b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_1 の体積 V_1 は，

$$V_1=2\int_0^a S_1(k)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\left[a^2k-\frac{k^3}{3}\right]_0^a=\frac{8}{3}\pi ab^2$$

条件より，$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)$ なので，$b^2=1-a^2\ (0<a<1)$ となり，

$$V_1=\frac{8}{3}\pi a(1-a^2)=\frac{8}{3}\pi(a-a^3)$$

$$\frac{dV_1}{da}=\frac{8}{3}\pi(1-3a^2)$$

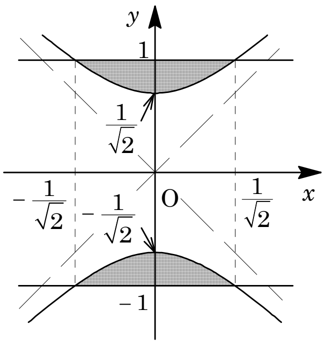
a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dV_1}{da}$		$+$	0	$-$	
V_1		$\nearrow$	$\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$	$\searrow$	

よって，V_1 の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

(2) 辺 RP と平面 $x=k$ との交点を N とおくと，点 N は線分 RP を $k:a-k$ に内分することより，$\mathrm{N}\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ b\right)$ となる。

これより，△PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_2 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KM，内径 KN のドーナツ形となり，その式は，$\mathrm{KM}^2=2b^2$，$\mathrm{KN}^2=\dfrac{b^2}{a^2}k^2+b^2$ から，

$$x=k,\ \frac{b^2}{a^2}k^2+b^2 \leqq y^2+z^2 \leqq 2b^2$$



すると，k を消去することで，立体 F_2 を表す式は，$\dfrac{b^2}{a^2}x^2+b^2 \leqq y^2+z^2 \leqq 2b^2$ となり，$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$$x^2+\frac{1}{2} \leqq y^2+z^2 \leqq 1$$

F_2 の xy 平面による切り口は，$z=0$ を代入して，$x^2+\dfrac{1}{2}\leqq y^2\leqq 1$ から，

$$2x^2-2y^2\leqq -1,\ -1\leqq y\leqq 1$$

よって，切り口の周は右上図の網点部の周である。

(3) △OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_3 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KN，内径 KL のドーナツ形となる。その面積 $S_3(k)$ は，

$$S_3(k)=\pi(\mathrm{KN}^2-\mathrm{KL}^2)=\pi\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+b^2\right)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}$$
$$=\frac{b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_3 の体積 V_3 は，$0\leqq k\leqq a$ から，

$$V_3=\int_0^a S_3(k)\,dk=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{2}{3}\pi ab^2=\frac{1}{4}V_1$$

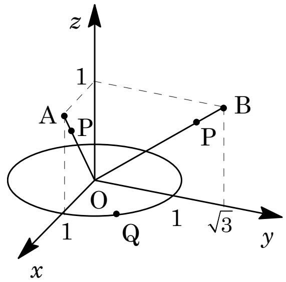
よって，(1)より，V_3 は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi=\dfrac{4}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

［解　説］

図形の回転体の体積を求める有名問題です。ただ，同じような設問が 3 題続くと，食傷気味になってしまいます。

28　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ とし，線分 OA 上の点 P を P_a，線分 OB 上の点 P を P_b とおくと，



$$\overrightarrow{OP_a} = a\overrightarrow{OA} = (a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{OP_b} = b\overrightarrow{OB} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b)$$

また，点 Q は円 W の周および内部にあるので，φ を任意の実数，$0 \leqq r \leqq 1$ として，$\overrightarrow{OQ} = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$

さて，立体 V_A 上の点 $R(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{OP_a} + \overrightarrow{OQ} = (a,\ 0,\ a) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (a + r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ a) \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，立体 V_B 上の点 $R(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{OP_b} + \overrightarrow{OQ} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (r\cos\varphi,\ \sqrt{3}b + r\sin\varphi,\ b) \cdots\cdots\cdots ②$$

そこで，立体 V_A と V_B の平面 $z = \cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による切り口を求める。

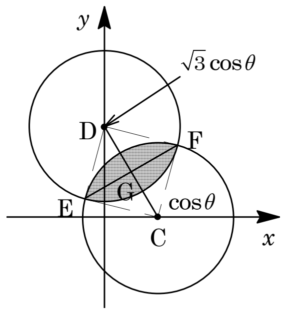
①より，$a = \cos\theta$ から，$x = \cos\theta + r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_A の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$(x - \cos\theta)^2 + y^2 = r^2$ となり，中心 $C(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

同様に，②より，$b = \cos\theta$ から，$x = r\cos\varphi$，$y = \sqrt{3}\cos\theta + r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_B の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$x^2 + (y - \sqrt{3}\cos\theta)^2 = r^2$ となり，中心 $D(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

よって，V_A と V_B の共通部分 V を，平面 $z = \cos\theta$ によって切断した切り口は，右図の網点部となる。



ここで，2 円の交点を E, F とし，線分 EF と CD の交点を G とおくと，中心間距離 $CD = 2\cos\theta$ となることより，$CG = DG = \cos\theta$ である。

すると，$\angle ECG = \angle FCG = \angle EDG = \angle FDG = \theta$ となり，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta\right) = 2\theta - \sin 2\theta$$

(2)　立体 V の体積 U は，$U = \displaystyle\int_0^1 S\,dz$ と表せ，$z = \cos\theta$ とおくと，$dz = -\sin\theta\,d\theta$ となり，$z = 0 \to 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2} \to 0$ である。

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta=-\Big[\,\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3\theta-\cos\theta)\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}\sin 3\theta-\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

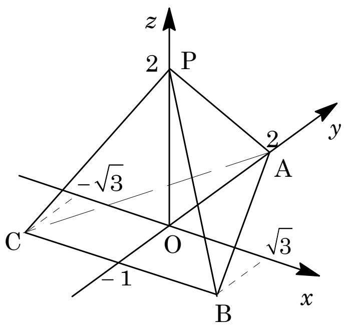
$$=-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

以上より，立体 V の体積は，$U=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ である。

［解　説］

断面積を積分することによって体積を求める問題です。数式的に処理をして断面図を描きましたが，図形的に意味を考える方がすばやく結論に到達します。ただ，プロセスの述べ方が難ですが。

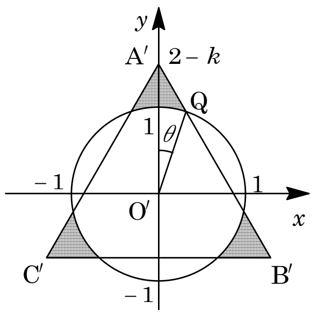
29　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］



まず，四面体 PABC を平面$z=k$ $(0\leqq k\leqq 2)$で切断したとき，切り口は△ABC と相似な正三角形となる。そして，辺 PA との交点は，PA を$2-k:k$に内分することより，その座標は$(0,\ 2-k,\ k)$である。

さて，不等式$x^2+y^2\geqq 1$で表される円柱側面の外部領域と，切り口の正三角形が共通部分をもつ条件は，$2-k\geqq 1$ すなわち$0\leqq k\leqq 1$ である。

そこで，$0\leqq k\leqq 1$ において，平面$z=k$での切り口を図示すると右図のようになる。



$\angle \mathrm{A'O'Q}=\theta$，網点部の面積を$S(k)$とおき，対称性を考えると，

$$S(k)=6\left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-k)\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta\right\}$$
$$=3(2-k)\sin\theta-3\theta$$

さらに，△O′QA′に正弦定理を適用すると，

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2-k}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)},\ \ 2-k=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$S(k)=6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta$

以上より，求める部分の体積をVとおくと，$V=\displaystyle\int_0^1 S(k)dk$である。

すると，$(*)$から，$dk=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$，$k=0\to 1$のとき$\theta=\frac{\pi}{3}\to 0$となり，

$$V=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left\{6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta\right\}\cdot 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left\{6\sin\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)\sin\theta-6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)-3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)+6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)d\theta=-\left[\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)d\theta=-\frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta=-\left[\theta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$V=3I_1-3I_2+6I_3=-3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+6\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3}-2\pi$

［解 説］

座標軸に垂直な平面での断面積をもとに計算を進める求積問題です。z 軸に垂直な平面で考えるか，y 軸に垂直な平面で考えるか，と迷います。計算量が少ないと予測した前者を選択しましたが，それでも相当な計算量が必要でした。なお，1998 年の東大で類題が出ていますが，そのときも z 軸に垂直な平面で四角錐を切断していました。