9　［岡山大］

Oを原点とする座標平面における曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1)　C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2)　点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

10　　　　［筑波大］

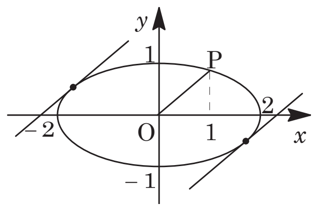
2 つの双曲線$C : x^2-y^2=1$，$H : x^2-y^2=-1$を考える。双曲線 H 上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$に対して，方程式$sx-ty=1$で定まる直線を l とする。

(1)　直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2)　直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q，R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3)　(2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点$\mathrm{P}(s,\ t)$の位置によらず一定であることを示せ。

$\boxed{9}$　　　　　　［岡山大］



(1)　$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の接点を，$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

接線の方程式は，$\dfrac{2x\cos\theta}{4}+y\sin\theta=1$ から，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の法線ベクトルは $\vec{n}=(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となり，条件より $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は垂直なので，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ から，

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0,\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$ となり，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，OP に平行な接線の方程式は，$(*)$から，

$$x\cos\frac{5}{6}\pi+2y\sin\frac{5}{6}\pi=2,\ x\cos\frac{11}{6}\pi+2y\sin\frac{11}{6}\pi=2$$

したがって，$-\sqrt{3}x+2y=4$，$\sqrt{3}x-2y=4$ である。

(2)　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき接点は，それぞれ $\mathrm{Q_1}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q_2}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

ここで，点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積が最大値をとるのは，Q における接線と OP が平行である点 $\mathrm{Q_1}$ または $\mathrm{Q_2}$ においてである。

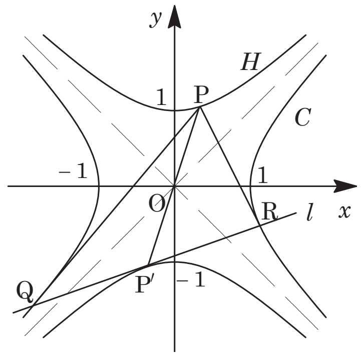
$$\triangle\mathrm{OPQ_1}=\frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\right|=1,\ \triangle\mathrm{OPQ_2}=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\right|=1$$

以上より，△OPQ の面積の最大値は 1 となり，このとき点 Q の座標は，$\mathrm{Q}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ または $\mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

［解　説］

上の解答例以外に，y 軸方向に 2 倍拡大して，楕円 C を円 $x^2+y^2=4$ に対応させる解法もあります。この方法では，計算は暗算程度になります。

10　［筑波大］



(1)　$C: x^2-y^2=1$ ……①，$H: x^2-y^2=-1$ ……②

に対して，H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の原点対称の点を $\mathrm{P}'(-s,\ -t)$ とおくと，P' における H の接線の方程式は，

$$-sx-(-t)y=-1,\ sx-ty=1 \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，直線 $l: sx-ty=1$ は点 P を通らない。

(2)　①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{t^2}(sx-1)^2=1$ となり，

$$(t^2-s^2)x^2+2sx-t^2-1=0$$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H 上の点から，$s^2-t^2=-1$ ……④となり，

$$x^2+2sx-t^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤は，$D/4=s^2+t^2+1>0$ となるので，異なる 2 実数解をもつ。すなわち，直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わる。

そこで，⑤の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)$，$\mathrm{R}\left(\beta,\ \dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2s,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=-s$$

これより，線分 QR の中点は P' となり，△PQR の重心 G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点である。

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-2s+s}{3},\ \dfrac{-2t+t}{3}\right)$ から，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-s}{3},\ \dfrac{-t}{3}\right)$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\left|\alpha\left(\dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)-\beta\left(\dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\beta-\alpha}{t}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2+1}}{|t|}$

④より，$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{\sqrt{t^2-1+t^2+1}}{|t|}=\dfrac{\sqrt{2t^2}}{|t|}=\sqrt{2}$

以上より，$\triangle\mathrm{GQR}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり，点 P の位置によらず一定の値をとる。

［解 説］

(1)は普通に連立して計算をしてもよいのですが，直線 l の方程式が，いかにも意味ありげなので工夫をしました。そして，図形的に結論を記しています。