17　［九州大］

実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解をもつような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。

18　　［東北大］

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1)　y を x を用いて表せ。

(2)　点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

17　　［九州大］

(1)　$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$ ……①に対して，$t=x+1$ とおくと，

$$a\{(t-1)^2+|t|+n-1\}=\sqrt{n}t,\ a(t^2-2t+|t|+n)=\sqrt{n}t \cdots\cdots②$$

(i)　$a=0$ のとき　①は実数解 $x=-1$ をもつ。

(ii)　$a\neq 0$ のとき　①が実数解をもつ条件は，②が実数解をもつ条件に等しい。

②より，$t^2-2t+|t|+n=\dfrac{\sqrt{n}}{a}t$ ………③

③は，$t=0$ を解としてもたないので，$t>0$ のとき，

$$t^2-t+n=\frac{\sqrt{n}}{a}t,\ t-1+\frac{n}{t}=\frac{\sqrt{n}}{a}$$

ここで，$f_1(t)=t-1+\dfrac{n}{t}$　$(t>0)$ とおくと，

$$f_1'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{n}$	$\cdots$
$f_1'(t)$		$-$	0	$+$
$f_1(t)$	∞	↘	$2\sqrt{n}-1$	↗

また，$t<0$ のとき，③は，$t-3+\dfrac{n}{t}=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$

$f_2(t)=t-3+\dfrac{n}{t}$　$(t<0)$ とおくと，

$$f_2'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	$\cdots$	$-\sqrt{n}$	$\cdots$	0
$f_2'(t)$	$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	↗	$-2\sqrt{n}-3$	↘	$-\infty$

したがって，③が実数解をもつのは，

$$\frac{\sqrt{n}}{a}\geqq 2\sqrt{n}-1 \cdots\cdots ④,\quad \frac{\sqrt{n}}{a}\leqq -2\sqrt{n}-3 \cdots\cdots ⑤$$

④より，$a>0$ のもとで $a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$，⑤より，$a<0$ のもとで $a\geqq-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}$

(i)(ii)より，①が実数解をもつ a の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$ ………⑥

(2)　$n\geqq 1$ のとき $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq 1$ となり，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}=-\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$，$\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ から，

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}\leqq 1$ である。

よって，⑥がすべての自然数 n に対して成立する条件は，$-\dfrac{1}{5}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

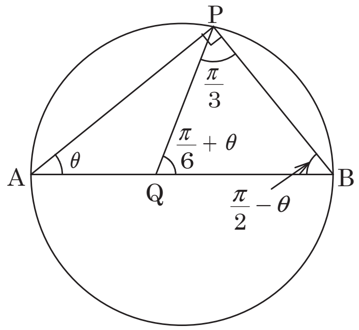
［解 説］

与えられた方程式を定数分離して，グラフをイメージして解いています。その際，絶対値の取り扱いに注意が必要となります。

18　　　　［東北大］

(1)　AB$=1$，BP$=x$ に対し，$\angle$PAB$=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta = x\ ,\ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$



さて，$\angle$BPQ$=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle$APQ$=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle \mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta,\ \angle \mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

PQ$=y$ から，$\triangle$PQB に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2,\ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

［解 説］

正弦定理の応用です。ただ, (2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で, 何回か微分に詰まって考えつきます。