24　　［熊本大］

正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|\,dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

25　［東京工大］

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$ を示せ。

26　　　　［名古屋大］

$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}{}'(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

27　　［東京医歯大］

関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

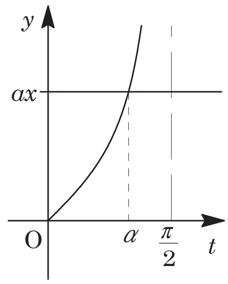
(3)　$b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4)　自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

24　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］



(1)　$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t - ax\cos t|\,dt$ に対して，$0 \leqq t < \frac{\pi}{2}$ では，

$\sin t - ax\cos t = \cos t(\tan t - ax)$ と変形すると，$a>0$ より

$x>0$ のとき $\sin\alpha - ax\cos\alpha = 0$ となる α が $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ に 1 つ

存在する。なお，$t=\frac{\pi}{2}$ では，$\sin t - ax\cos t = 1 > 0$ である。

(i)　$x>0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\alpha} -(\sin t - ax\cos t)\,dt + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - ax\cos t)\,dt$$

$$=\Big[\cos t + ax\sin t\Big]_0^{\alpha} - \Big[\cos t + ax\sin t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\cos\alpha + ax\sin\alpha - 1 - ax + \cos\alpha + ax\sin\alpha$$

$$=2ax\sin\alpha + 2\cos\alpha - ax - 1$$

ここで，$\sin\alpha = ax\cos\alpha$ より，$(ax\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$ より，

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2+1}},\quad \sin\alpha = \frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

よって，$f(x)=\dfrac{2a^2x^2}{\sqrt{a^2x^2+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{a^2x^2+1}} - ax - 1 = 2\sqrt{a^2x^2+1} - ax - 1$

(ii)　$x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - ax\cos t)\,dt = -\Big[\cos t + ax\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -ax+1$$

(2)　$x \leqq 0$ のときは $f'(x)=-a<0$ から $f(x)$ は単調に減少し，$x>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{4a^2x}{2\sqrt{a^2x^2+1}} - a$$

$$=\frac{a\left(2ax-\sqrt{a^2x^2+1}\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$=\frac{a\left(3a^2x^2-1\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}\left(2ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘		↗

すると，$f(x)$ は増減が右上表のようになり，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$ で最小となる。最小値は，

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}a}\right)=2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{3a^2}+1} - a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}a} - 1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{3}-1$$

［解 説］

絶対値付きの関数を積分する標準的な問題ですが，計算力が必要です。

25　　［東京工大］

(1)　条件より，$a_1=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i$ なので，

$$a_2=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}\cdot a_1=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned}a_3&=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_2)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)}\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ ……①と予測できるので，以下，数学的帰納法を用いて，①を証明する。

(i)　$k=1$ のとき　①は明らかに成立している。

(ii)　$k\leqq l$ のとき　①が成立していると仮定すると，

$$\begin{aligned}a_{l+1}&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}(a_1+a_2+\cdots+a_l)\\&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+l-1}-\frac{1}{n+l}\right)\\&=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}=\frac{1}{(n+l)(n+l+1)}\end{aligned}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 k で，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ である。

(3)　(2)より，$\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ となり，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$ から，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ である。

［解 説］

(2)は，いわゆる強化型の数学的帰納法です。(3)は，不等式で評価をして，区分求積法につなぐものです。どちらも，一癖ある典型題です。

26　　［名古屋大］

(1)　$f_0(x)=xe^x$ より，$f_0{}'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ となり，

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x}te^t\,dt+(1+x)e^x=\Big[\,te^t-e^t\,\Big]_{-x}^{x}+(1+x)e^x$$
$$=(x-1)e^x-(-x-1)e^{-x}+(1+x)e^x=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt=\Big[\,(at+b)e^t\,\Big]_{-x}^{x}-a\int_{-x}^{x}e^t\,dt$

$$=(ax+b)e^x-(-ax+b)e^{-x}-ae^x+ae^{-x}$$
$$=(ax-a+b)e^x+(ax+a-b)e^{-x}$$

すると，$g(-x)=(-ax-a+b)e^{-x}+(-ax+a-b)e^x=-g(x)$ となり，$u=-x$ とおくと，

$$\int_{-c}^{c}g(x)dx=\int_{-c}^{c}-g(-x)dx=\int_{c}^{-c}-g(u)(-du)=-\int_{-c}^{c}g(u)du$$

よって，$\displaystyle\int_{-c}^{c}g(x)dx=0$ である。

(3)　$f_1(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_0(t)dt+f_0{}'(x)$ なので, (2)より，

$$\int_{-x}^{x}f_1(t)dt=\int_{-x}^{x}f_0{}'(t)dt=\Big[\,f_0(t)\,\Big]_{-x}^{x}=f_0(x)-f_0(-x)=xe^x+xe^{-x}$$

すると，$f_2(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_1(t)dt+f_1{}'(x)=xe^x+xe^{-x}+(2x+2)e^x+(1-x-1)e^{-x}$

$$=(3x+2)e^x$$

これより，a_n，b_n を定数として，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ と推測できるので，以下，0 以上の整数 n で，この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=1$，$b_0=0$ である。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ であると仮定すると，

$$f_{2k+1}(x)=\int_{-x}^{x}f_{2k}(t)dt+f_{2k}{}'(x)$$

すると，$f_{2k+2}(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)dt+f_{2k+1}{}'(x)\cdots\cdots$①なので, (2)より，

$$\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)dt=\int_{-x}^{x}f_{2k}{}'(t)dt=\Big[\,f_{2k}(t)\,\Big]_{-x}^{x}=f_{2k}(x)-f_{2k}(-x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x-(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

$$f_{2k+1}{}'(x)=f_{2k}(x)-\{-f_{2k}(-x)\}+f_{2k}{}''(x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}+(a_kx+2a_k+b_k)e^x$$
$$=(2a_kx+2a_k+2b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

よって，①より，$f_{2k+2}(x)=(3a_kx+2a_k+3b_k)e^x$ となる。

ここで，$a_{k+1}=3a_k$ ……②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ ……③とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ である。

さて，②より，$a_{n+1}=3a_n$ なので，$a_n=a_0\cdot 3^n=3^n$

また，③より，$b_{n+1}=2a_n+3b_n=3b_n+2\cdot 3^n$ なので，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$ から，

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{b_0}{3^0}+\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}n\,,\quad b_n=\frac{2}{3}n\cdot 3^n=2n\cdot 3^{n-1}$$

以上より，$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})e^x$ である。

[解　説]

定積分の計算問題です。(2)の誘導を用いると計算量は減少しますが，それでもかなりの量があります。なお，(2)では $g(x)$ が奇関数であることを見つけたような記述をしていますが，これは文脈から「におい」を感じとった結果にすぎません。

27　　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^3-x^2+x$ に対して，$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0$

よって，$f(x)$ はつねに増加する関数である。

(2)　(1)より，$f(x)$ は逆関数 $g(x)$ が存在し，

$$(x+1)^3-f(x)=4x^2+2x+1=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$f(x)-(x-1)^3=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

よって，$(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$ である。

ここで，$y=f(x)$ とおくと，$x=g(y)$ となり，

$$\{g(y)-1\}^3<f(g(y))<\{g(y)+1\}^3,\ \{g(y)-1\}^3<y<\{g(y)+1\}^3$$

よって，$g(y)-1<\sqrt[3]{y}<g(y)+1$ から，$\sqrt[3]{y}-1<g(y)<\sqrt[3]{y}+1$

すると，$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ ………①

(3)　不等式 $0<\dfrac{1}{x^2+1}<\dfrac{1}{x^2}$ が成立することより，$b>a>0$ について，

$$0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\int_a^b\frac{1}{x^2}dx \quad\text{………②}$$

ここで，$\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=-\Big[\frac{1}{x}\Big]_a^b=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$ ………③

②③より，$\displaystyle 0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ ………④

(4)　$\displaystyle A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$ に対して，$g(x)=y$ とおくと，$x=f(y)$ となり，

$x=n\to 2n$ のとき $y=g(n)\to g(2n)$ から，$\alpha_n=g(n)$，$\beta_n=g(2n)$ とおくと，

$$A_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^3+y}\cdot f'(y)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{3y^2-2y+1}{y^3+y}dy$$

さて，$\dfrac{3y^2-2y+1}{y^3+y}=\dfrac{a}{y}+\dfrac{by+c}{y^2+1}$ とおくと，$3y^2-2y+1=a(y^2+1)+y(by+c)$

係数を比べると，$a=1$，$b=2$，$c=-2$ となり，

$$\begin{aligned}A_n&=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y-2}{y^2+1}\right)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y}{y^2+1}-\frac{2}{y^2+1}\right)dy\\&=\Big[\log y(y^2+1)\Big]_{\alpha_n}^{\beta_n}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy\\&=\log\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy \quad\text{………⑤}\end{aligned}$$

①より，$\sqrt[3]{n}-1<\alpha_n<\sqrt[3]{n}+1$，$\sqrt[3]{2n}-1<\beta_n<\sqrt[3]{2n}+1$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{2n}-1}{\sqrt[3]{n}+1}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2n}+1}{\sqrt[3]{n}-1},\quad \frac{\sqrt[3]{2}-(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1+(\sqrt[3]{n})^{-1}}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1-(\sqrt[3]{n})^{-1}}$$

よって，$\gamma_n=\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\sqrt[3]{2}$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\gamma_n\cdot\frac{{\gamma_n}^2+({\alpha_n}^2)^{-1}}{1+({\alpha_n}^2)^{-1}}=\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2=2\cdots\cdots\cdots⑥$$

④より，$\displaystyle 0<\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy<\frac{1}{\alpha_n}$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy=0\cdots\cdots\cdots⑦$

⑤⑥⑦より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=\log 2$

［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。誘導はついているものの，その意味を考えながら計算を進める必要があります。時間をかけて演習するのに適した 1 題です。なお, (2)の不等式 $(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$ は，結論を同値変形して得たものです。