14　　［京都大］

a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

$\boxed{15}$ ［東北大］

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ。

(2) $\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ。

(4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n} \leqq r\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{14}$　　［京都大］

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より，$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$$

(ii)　$a>1$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

［解　説］

見かけよりは難です。極限を大雑把にとらえ不等式で評価しました。

15　　　　［東北大］

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=2$ のとき　$a_1 = 1$ なので，$a_2 = \sqrt{\dfrac{3a_1+4}{2a_1+3}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} > 1$

(ii) $n=k$ のとき　$a_k > 1$ と仮定すると，

$$a_{k+1} - 1 = \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_k+1}{2a_k+3}} - 1 > 0$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ である。

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ より，$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$ となり，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4) = 0$

$\alpha > 0$ より，$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$\alpha - a_1 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} - 1 = \dfrac{\sqrt{33}-5}{4} > 0$ より，$a_1 < \alpha$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k < \alpha$ と仮定する。

$$\alpha - a_{k+1} = \sqrt{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}} - \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} = \frac{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} - \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}}$$

$$= \frac{(3\alpha+4)(2a_k+3) - (2\alpha+3)(3a_k+4)}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

$$= \frac{\alpha - a_k}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

よって，$\alpha - a_{k+1} > 0$ から，$a_{k+1} < \alpha$ である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ である。

(4) (1)と(3)の結果より，$1 \leqq a_n < \alpha$ となり，

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_n+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_n+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_n+4)}\right\}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}\left(\sqrt{35}+\sqrt{35}\right)} = \frac{1}{10\sqrt{35}}$$

すると，$r = \dfrac{1}{10\sqrt{35}}$ とすることができ，このとき，$\alpha - a_{n+1} \leqq r(\alpha - a_n)$ なので，

$$0 < \alpha - a_n \leqq (\alpha - a_1)r^{n-1} = (\alpha-1)r^{n-1}$$

よって，$0 < r < 1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n) = 0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

［解 説］

漸化式と極限についての頻出問題です。なお，誘導はていねいです。