32　　［千葉大］

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{33}$　　　　［東京大・文］

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C, 原点 O を通る傾き t の直線を l とし, C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし, それら共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

34　［神戸大・理］

c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。

35 ［一橋大］

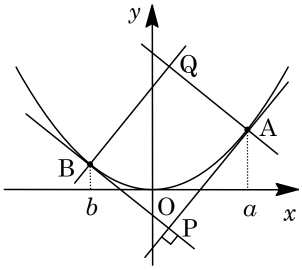
原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。

$\boxed{32}$ ［千葉大］



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

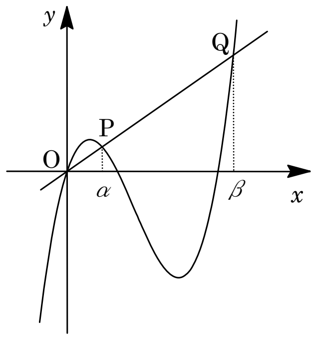
なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

［解 説］

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

33　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］



$C : y = x(x-1)(x-3)$ ……①，$l : y = tx$ ……②に対して，共有点の x 座標は,

$$x(x-1)(x-3) = tx\,,\ x(x^2-4x+3-t) = 0$$

$x \neq 0$ とすると，$x^2-4x+3-t = 0$ ………③

さて, C と l が O 以外の共有点をもつ条件は, ③が $x \neq 0$ の解をもつことである。さらに, ③が重解として $x = 0$ をもつ場合はないことに注意すると，条件は,

$$D/4 = 4-(3-t) = 1+t \geqq 0\,,\ t \geqq -1 \text{ ………④}$$

ここで, ④のとき, ③の解を $x = \alpha,\ \beta$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\alpha,\ t\alpha)\,,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\beta,\ t\beta)$$

これより, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積 $g(t)$ は,

$$g(t) = \sqrt{1+t^2}\,|\alpha|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|\beta| = (1+t^2)|\alpha\beta| = (1+t^2)|3-t|$$

(i)　$t \geqq 3$ のとき

$$g(t) = -(1+t^2)(3-t) = t^3-3t^2+t-3\,,\ g'(t) = 3t^2-6t+1$$

$g'(t) = 0$ の解は，$t = \dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ となり，ともに $t<3$ である。

(ii)　$-1 \leqq t < 3$ のとき

$$g(t) = (1+t^2)(3-t) = -(t^3-3t^2+t-3)\,,\ g'(t) = -(3t^2-6t+1)$$

(i)(ii)より，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘	0	↗

さて，$-1 \leqq t < 3$ のとき，$g(t)$ を $g'(t)$ で割ると,

$$g(t) = g'(t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\right)$$

すると，$g\left(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3} = \dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$　（複号同順）

よって，$g(t)$ の極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}\left(t = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}\left(t = \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，および $0\,(t=3)$ である。

［解 説］

微分と増減についての標準的な問題です。

34　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　2 次以下の多項式$f(x)$に対し，曲線$y=f(x)$が点$(0,\ 0)$を通ることより，

$$f(x)=ax^2+bx\quad(a,\,b\text{ は定数})$$

さらに，点$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$も通るので，$f(c)=c^3-2c$，$f(1)=-1$となり，

$$ac^2+bc=c^3-2c\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b=-1\cdots\cdots\cdots②$$

$0<c<1$から，①より$ac+b=c^2-2$となり，②と合わせて，

$$ac-a=c^2-1,\quad a(c-1)=(c+1)(c-1)$$

よって，$a=c+1$，$b=-1-(c+1)=-c-2$となるので，

$$f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x$$

(2)　$y=(c+1)x^2-(c+2)x$と$y=x^3-2x$を連立すると，

$$x^3-2x=(c+1)x^2-(c+2)x,\quad x^3-(c+1)x^2+cx=0$$

すると，$x(x-c)(x-1)=0$より$x=0,\ c,\ 1$となり，2 曲線で囲まれた部分の面積Sは，$0<x<c$で$x(x-c)(x-1)>0$，$c<x<1$で$x(x-c)(x-1)<0$から，

$$S=\int_0^c x(x-c)(x-1)\,dx+\int_c^1 -x(x-c)(x-1)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_0^c-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_c^1$$

$$=\frac{c^4}{4}-\frac{c^4+c^3}{3}+\frac{c^3}{2}-\frac{1}{4}(1-c^4)+\frac{c+1}{3}(1-c^3)-\frac{c}{2}(1-c^2)$$

$$=-\frac{c^4}{6}+\frac{c^3}{3}-\frac{c}{6}+\frac{1}{12}$$

(3)　(2)より，$S'=-\dfrac{2}{3}c^3+c^2-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1)$

ここで，$S'=0$の解は$c=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$なので，$0<c<1$における S の値の増減は，右表のようになる。

c	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$c=\dfrac{1}{2}$のときSは最小になる。

［解 説］

微積分に関する標準的な問題です。(2)では，図が描きにくいので，式を基準として考えた方が明快でしょう。

$\boxed{35}$ ［一橋大］

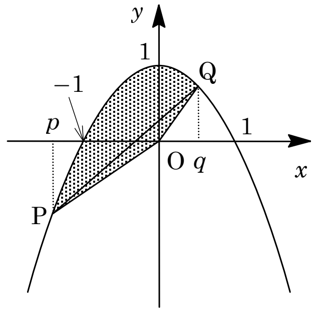
(1)　放物線 $C : y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して，直線 PQ の方程式は，

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて，C と直線 PQ に囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_p^q \{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q \{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q (x-p)(x-q)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



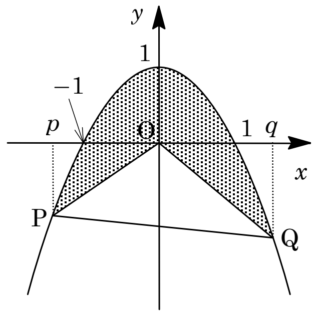
また，△OPQ の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると，2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S は，直線 PQ の y 切片に注目し，



(i)　$1+pq\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii)　$1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より，$S=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2)　$q=p+1$ のとき，(1)より，$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり，

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって，$p=-\frac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\frac{13}{24}$ をとる。

(3)　$pq=-1$ のとき，$p<q$ から，$p<0<q$ であり，(1)より，

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\frac{1}{q}$　$(q=1)$ のとき成立するので，このとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

［解 説］

面積の標準的な問題ですが，場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。