31　　　　［神戸大・文］

a, b, c は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1)　a を b, c を用いて表せ。

(2)　$b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

32 ［岡山大・理］

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ を

$$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。

33　［広島大・理］

座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$　B$(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3)　k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

34　　　　［北海道大・理］

実数 x, y, s, t に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1)　w を z で表し，s, t を x, y で表せ。

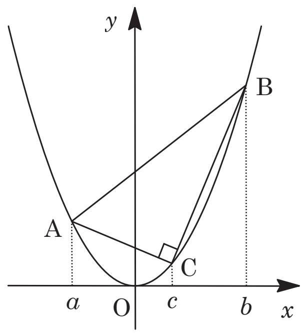
(2)　$0 \leqq s \leqq 1$ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。

$\boxed{35}$ ［東京大・文］

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

31　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・文］



(1)　A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ なので，$1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，$a=-c-\dfrac{1}{b+c}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2)　②より，$b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\ \cdots\cdots\cdots③$

ここで，$b+c<0$ とすると，①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが，これは $a<b$ に反するので，$b+c>0$ である。

すると，③より，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお，等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで，(2)より $b-a\geqq 2$ であり，$(b+a)^2\geqq 0$ であるので，

$$\mathrm{AB}\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは，$b-a=2$ かつ $b+a=0$，すなわち $a=-1$，$b=1$ のときである。このとき，$b+c=1$ から $c=0$ となる。

よって，AB の最小値は 2 であり，このとき A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 1)$，C$(0,\ 0)$ となる。

［解 説］

(3)では大雑把に評価して，細部を詰めています。この方法が，いつもうまくいくとは限りませんが。

$\boxed{32}$ ［岡山大・理］

(1)　Q$(x,\ y)$とおくと，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T上に点$(a,\ b)$があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$から，点$(a,\ -b)$もT上にある。

(2)　(1)より，図形Tはx軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\quad y=|x-3|-2|x+3|$$

(i)　$x<-3$のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$より，$-9\leqq x<3$となる。

(ii)　$-3\leqq x<3$のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$より，$-3\leqq x\leqq -1$となる。

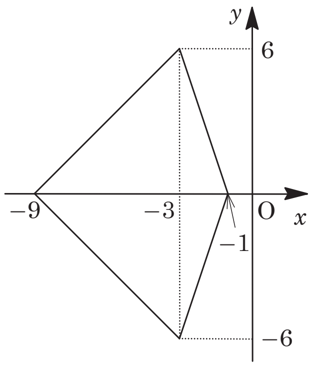
(iii)　$x\geqq 3$のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$を満たすxは存在しない。

(i)～(iii)の結果をもとに，x軸対称すると図形Tは右図のようになり，囲まれる領域の面積Sは，

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$



(3)　D$(x,\ y)$が図形T上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$より，

$$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$が最小となるのは，$x+y$が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$の場合である。

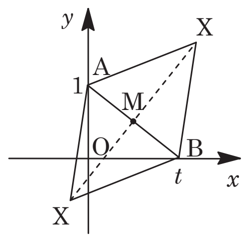
これより，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$の最小値は，$21-(-3+6)=18$である。

［解説］

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

$\boxed{33}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　線分 AB の中点 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。



また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ は，

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

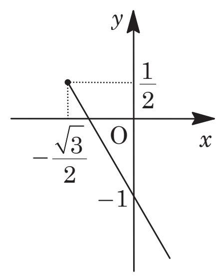
さて，線分 AB を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点を X とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\vec{e}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

よって，$\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ または $\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(2)　条件より，$\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ となり，$\mathrm{C}(x,\ y)$ とおくと，



$$x=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdots\cdots\cdots②$$

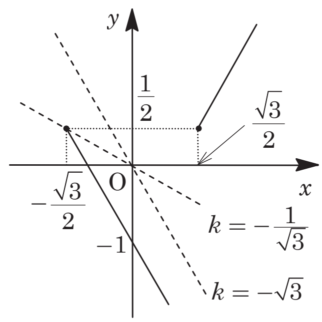
①より，$t=2x+\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})=-\sqrt{3}x-1$$

$t\geqq 0$ から $x\geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，点 C の軌跡は右図のようになる。

(3)　点 C 以外のもう 1 つの頂点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ についても同様にすると，

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



よって，点 C と点 D の軌跡は右図の実線となる。

さて，直線 $y=kx$ 上の点 P に対して，3 点 A，B，P を頂点とする正三角形ができるのは，点 C，D の軌跡と直線 $y=kx$ が共有点をもつことなので，

$$k<-\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k$$

［解　説］

とらえにくい(3)の設問への誘導が，うまくつけられている問題です。なお，(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが，回転を利用する方法もあります。

34　　［北海道大・理］

(1)　$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \text{………⑤},\quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \text{………⑥}$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4}\ \text{………⑧}$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

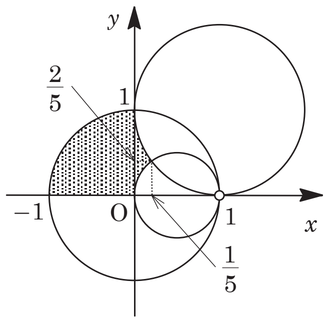
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$$-x-2y+1=0,\quad x=-2y+1$$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$$5y^2-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$



$z\neq 1$ のもとで，⑦〜⑩より，求める範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で y 切片 k の直線を表す。

すると，k が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$を通るときであり，その最小値は，

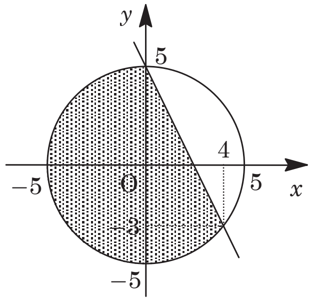
$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

［解 説］

複素数が題材ですが，内容的には xy 平面での不等式と領域の問題です。

$\boxed{35}$　［東京大・文］

まず，連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ の満たす領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



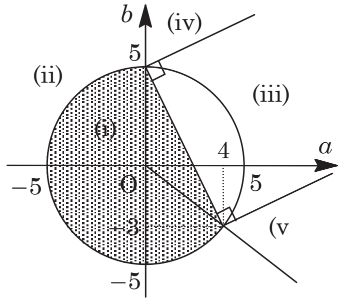
また，実数 a，b に対して，

$$z=x^2+y^2-2ax-2by$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$$

これより，z が最小値をとるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ の距離が最小になるときである。

ここで，境界線 $2x+y=5$，すなわち $y=-2x+5$ に垂直で，点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$y=\frac{1}{2}x+5,\quad y=\frac{1}{2}x-5$$



さらに，原点 O と点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$x=0,\quad y=-\frac{3}{4}x$$

(i)　$a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $b \leqq -2a+5$ のとき

　z は，$(x,\ y)=(a,\ b)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=-(a^2+b^2)=-a^2-b^2$$

(ii)　$a^2+b^2 \geqq 25$ かつ $\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき

　z は，O と点 $(a,\ b)$ を結ぶ線分と円 $x^2+y^2=25$ の交点において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$$

(iii)　$b \geqq -2a+5$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a+5$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

　z は，点 $(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(2a+b-5)^2-(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$$

(iv)　$a \geqq 0$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

　z は，$(x,\ y)=(0,\ 5)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=25-10b$$

(v)　$b \geqq -\frac{3}{4}a$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(4,\ -3)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=16+9-8a+6b=25-8a+6b$$

［解 説］

点 $(a,\ b)$ が領域の外部にあるときは，境界線に沿って，円を滑らないように転がせながら，考えをまとめています。