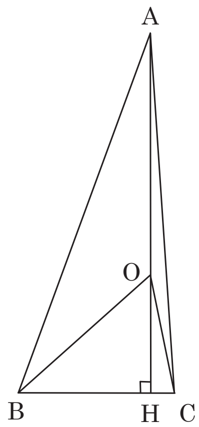
17　　［一橋大］

平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。

17 ［一橋大］

$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。



すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで，点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\quad \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

［解 説］

$\triangle\mathrm{OBC}$ は決定されるので，点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお，OH の長さは勢いで求めてしまいましたが，必要ありませんでした。