35　　［東北大・理］

A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

36　［九州大］

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1)　最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2)　最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3)　最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

37　　　　［岡山大・文］

1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(2)　X_n が k である確率 q_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(3)　X_n の期待値を $n=2$ の場合に求めよ。

(4)　X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ。

38　　［広島大・文］

座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ。

(2)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(3)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

39　［熊本大・医］

X, Y は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また，n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき，X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が，B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 $(X,\ Y)$ は何通りあるか。

40　［一橋大］

サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

35

［東北大・理］

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(1) 右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

さて，A→B→A と投げて A が勝ちとなるのは，まず B は 5 以下の目を出す。A は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上を出すときになり，右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{5}{6}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{54}$$

(2) A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右上表から 10 通りの場合がある。さらに，B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右上表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3) A→B→A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは，A，B とも 1 回目と 2 回目と 3 回目の目の和が 5 以下である。

(i) 1 回目の目が 1 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)，(2, 1)，(2, 2)，(3, 1)

(ii) 1 回目の目が 2 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)，(1, 2)，(2, 1)

(iii) 1 回目の目が 3 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)

(i)(ii)(iii)より，合わせて，$6+3+1=10$ 通りの場合がある。

したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{216}\times\frac{10}{216}=\frac{25}{11664}$$

［解 説］

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

36　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2)　L, R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3)　L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i)　最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times5=\frac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき, 3 回目に $6-k$ の目が出る場合より，

L6→R1→L5，L6→R2→L4，L6→R3→L3，L6→R4→L2，L6→R5→L1

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times5=\frac{5}{216}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{5}{108}$ である。

［解　説］

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

$\boxed{37}$ ［岡山大・文］

(1)　1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおくとき，$X_n \leqq k$ となる確率 p_k は，$p_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n$ である。

(2)　$X_n = k$ となる確率 q_k は，$k \geqq 2$ のとき，

$$q_k = p_k - p_{k-1} = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$k=1$ のとき，$q_1 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ となるが，$(*)$に $k=1$ をあてはめた値に一致する。

(3)　$n=2$ のとき，$q_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^2 = \dfrac{2k-1}{36}$

X_n の期待値を E_n とおくと，

$$E_2 = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}(2k^2 - k) = \frac{1}{36}\left(2\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right) = \frac{161}{36}$$

(4)　$E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} = \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$

$$= 6 - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^n = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

これより，n の値が増加すると E_n の値は増加する。

ここで，(3)より，$E_2 = \dfrac{161}{36} < 4.5$ であり，

$$E_3 = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 6 - \frac{25}{24} > 4.5$$

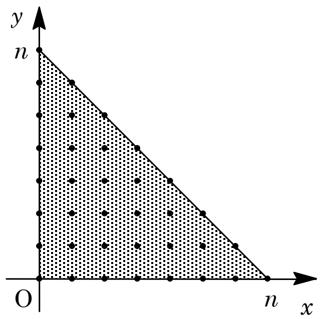
よって，E_n が 4.5 以上となる n の範囲は，$n \geqq 3$ である。

［解　説］

期待値についての標準的な問題です。(4)は(3)の値が誘導になっています。なお，シグマ計算において少し工夫をしていますが，そのまま計算しても構いません。

$\boxed{38}$　　［広島大・文］

(1)　まず，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ で表される領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



さて，a, b, c, d が整数で，$|a-c|+|b-d|=1$ のとき，

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより，格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，その隣接点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ は，領域 D 内にあり，

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点は，点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ である。

また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，隣接点については，

(i)　$\mathrm{P}(n,\ 0)$ のとき

隣接点は，点 $(n-1,\ 0)$ となり，個数は 1 である。

(ii)　$\mathrm{P}(0,\ n)$ のとき

隣接点は，点 $(0,\ n-1)$ となり，個数は 1 である。

(iii)　$\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は，点 $(k-1,\ n-k)$ および点 $(k,\ n-k-1)$ となり，個数は 2 である。

(2)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは，連立不等式 $x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$x+y \leqq n-1$ で表される領域内の格子点である。その個数は，

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(3)　領域 D 内の格子点の総数 N は，$N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(i)　隣接点の個数が 1 のとき

(1)の(i)(ii)より 2 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2}{N}$ となる。

(ii)　隣接点の個数が 2 のとき

点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および(1)の(iii)より，$1+(n-1)=n$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{n}{N}$ となる。

(iii)　隣接点の個数が 3 のとき

格子点が $\mathrm{P}(k,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ で，$2(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2(n-2)}{N}$ となる。

(iv)　隣接点の個数が 4 のとき

(2)より $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$ となる。

(i)～(iv)より，隣接点の個数の期待値 E は,

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot2+2\cdot n+3\cdot2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq3$ となるのは，$4n\geqq3n+6$ から，$n\geqq6$ である。

［解 説］

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。

$\boxed{39}$　　[熊本大・医]

(1)　A 君がさいころを投げて出た目が X に属するのを○，属さないのを●，B 君がさいころを投げて出た目が Y に属するのを□，属さないのを■で表す。すると，A 君が勝つ場合は，○，●■○，●■●■○，……となる。

さいころを投げたとき，X，Y に属する目が出る確率はそれぞれ p，q なので，A 君が勝つ確率 $P(A)$ は，$0<p<1$，$0<q<1$，$p+q \leqq 1$ ……①のもとで，

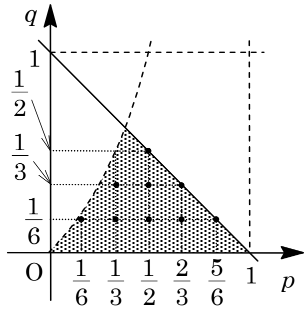
$$P(A)=p+(1-p)(1-q)p+(1-p)^2(1-q)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$
$$=p\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

(2)　B 君が勝つ場合は，●□，●■●□，●■●■●□，……となるので，その確率 $P(B)$ は，(1)と同様にして，

$$P(B)=(1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+(1-p)^3(1-q)^2q+\cdots\cdots$$
$$+(1-p)^n(1-q)^{n-1}q=(1-p)q\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

条件より $P(A)>P(B)$ なので，$p>(1-p)q$ となり，

$$q<\frac{p}{1-p}=-1-\frac{1}{p-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$



①②を満たす領域は右図の網点部となり，p，q のとり得る値は，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$ から，

(i)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=30$

(ii)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=150$

(iii)　$(p,\ q)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3=140$

(iv)　$(p,\ q)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=45$

(v)　$(p,\ q)=\left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき　$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1=6$

(i)～(v)より，$(X,\ Y)$ の組の総数は，$30+150+140+45+6=371$

[解　説]

プロセスは難しくないのですが，注意深さが求められる問題です。

40　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10^{n-1}a_1+\cdots+10^2a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ に対して，

(i)　$n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる条件は，下 2 桁が 4 の倍数であることなので，

$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (6,\ 4),\ (1,\ 6),$
$(3,\ 6),\ (5,\ 6)$

この確率は，$\dfrac{6^{n-2}\times 9}{6^n}=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii)　$n=1$ のとき　s_n が 4 で割り切れる確率は，$\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$s_n=10(10^{n-2}a_1+\cdots+10a_{n-2}+a_{n-1})+a_n=10s_{n-1}+a_n$

ここで，s_{n-1} を 6 で割った余りが，それぞれ 0，1，2，3，4，5 であるとき，s_n が 6 で割り切れるのは，a_n が順に 6，2，4，6，2，4 である場合だけとなる。

s_n が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと，

$$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots①$$

なお，$p_1=\dfrac{1}{6}$ より，①は $n=1$ のときも成立している。

(3)　まず，s_{n-1} を 7 で割った余りが 0 であるとき，a_n がどんな値でも s_n が 7 で割り切れる場合はない。

また，s_{n-1} を 7 で割った余りがそれぞれ 1，2，3，4，5，6 であるとき，s_n が 7 で割り切れるのは，a_n が順に 4，1，5，2，6，3 である場合だけとなる。

s_n が 7 で割り切れる確率を q_n とおくと，$q_1=0$ で，

$$q_n=0\times q_{n-1}+\frac{1}{6}(1-q_{n-1})=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}q_{n-1}$$

変形すると，$q_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{7}\right)$ となり，

$$q_n-\frac{1}{7}=\left(q_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$q_n=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots②$

なお，$q_1=0$ より，②は $n=1$ のときも成立している。

［解　説］

(1)については，有名な知見をもとに解きましたが，それと同じ立脚点では，続く設問に対して難攻します。考え方の融通無碍な切り換えの要求されるところが，最大の難所となっています。