$\boxed{44}$ ［大阪大・理］

4 個の整数 $n+1$，$n^3+3$，$n^5+5$，$n^7+7$ がすべて素数となるような正の整数 $n$ は存在しない。これを証明せよ。

**45**　　［千葉大］

整数 $p$，$q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　$n$，$k$ が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left( \dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，$n$ によらない値になることを示せ。

(2)　$m$ が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

$\boxed{46}$　　［京都大・文］

$n$ と $k$ を自然数とし，整式 $x^n$ を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　$a$ と $b$ は整数であることを示せ。

(2)　$a$ と $b$ をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

**47**　［京都大・理］

$n$ を自然数とし，整式 $x^n$ を整式 $x^2-2x-1$ で割った余りを $ax+b$ とする。このとき $a$ と $b$ は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

**48**　　［筑波大・理］

3 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ c_{n+1}=-a_n-b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$を満たすとする。ただし，$a, b, c$は定数とする。

(1)　$p_n=a_n+b_n+c_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第 $n$ 項までの和$S_n$を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第 $2n$ 項までの和を$T_n$とする。$a+b+c$が奇数であれば，すべての自然数 $n$ に対して$T_n$が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

**49**　　［京都大・理］

$N$ を 2 以上の自然数とし，$a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

$a_n$ が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，$a_n$ が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$

このとき，どのような自然数 $M$ に対しても

$$\sum_{n=1}^{M}a_n \leqq 2^{N+1}-N-5$$

が成り立つことを示せ。

**50**　　[名古屋大・理]

$k$, $m$, $n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\ \ S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の $n$ に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　$p$ が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　($k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2$) は $p$ の倍数であることを示せ。

**44**　　　　　　［大阪大・理］

まず，正の整数 $n$ を 3 で割った余りと，$n^3$，$n^5$，$n^7$ をそれぞれ 3 で割った余りは等しくなる。

そこで，$n$ を 3 で割った余りと，$n+1$，$n^3+3$，$n^5+5$，$n^7+7$ をそれぞれ 3 で割った余りを表にまとめると，右のようになる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $n+1$ | 1 | 2 | 0 |
| $n^3+3$ | 0 | 1 | 2 |
| $n^5+5$ | 2 | 0 | 1 |
| $n^7+7$ | 1 | 2 | 0 |

(i)　$n$ を 3 で割った余りが 0 のとき

$n^3+3$ は 3 の倍数となり，$n^3+3\geqq 30$ なので，$n^3+3$ は素数ではない。

(ii)　$n$ を 3 で割った余りが 1 のとき

$n^5+5$ は 3 の倍数となり，$n^5+5\geqq 6$ なので，$n^5+5$ は素数ではない。

(iii)　$n$ を 3 で割った余りが 2 のとき

$n^7+7$ は 3 の倍数となり，$n^7+7\geqq 135$ なので，$n^7+7$ は素数ではない。

(i)～(iii)より，4 個の整数 $n+1$，$n^3+3$，$n^5+5$，$n^7+7$ がすべて素数となるような正の整数 $n$ は存在しない。

［解 説］

$n$ を偶数として，$n+1$，$n^3+3$，$n^5+5$，$n^7+7$ を計算していくと，素数でないのは 3 の倍数という共通項が見つかります。すると，行うべきことは明白です。なお，$n+1$ については，結果として，必要ありませんでした。

**45**　　　　［千葉大］

(1)　$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\} $$
$$ =\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1} $$

(2)　(1)の等式について，$k=2$ とすると，

$$ {}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right) $$

これより，$m$ が 3 以上の整数のとき，$S=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，

$$ S=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right) $$
$$ =\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)+\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right) $$
$$ =\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{2}{m(m-1)}\right\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)} $$

## ［解 説］

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

**46**　　［京都大・文］

(1)　整式 $x^n$ を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $q(x)$，余りを $ax+b$ とするとき，

$$x^n=(x-k)(x-k-1)q(x)+ax+b \cdots\cdots\cdots ①$$

①に $x=k$, $k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$k^n=ak+b \cdots\cdots\cdots ②,\ (k+1)^n=ak+a+b \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$a=(k+1)^n-k^n$ となり，$n$ と $k$ は自然数なので，$a$ は整数である。

すると，②は，$b=k^n-ak$ なので，$b$ も整数である。

(2)　$a$ と $b$ がともに素数 $p$ で割り切れるとすると，$a_0$，$b_0$ を整数として，

$$a=a_0p,\ b=b_0p$$

②③に代入すると，

$$k^n=a_0pk+b_0p \cdots\cdots\cdots ④,\ (k+1)^n=a_0pk+a_0p+b_0p \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$k^n$ は $p$ を約数にもつ，すなわち $k$ は $p$ を約数にもつ。

⑤より，$(k+1)^n$ は $p$ を約数にもつ，すなわち $k+1$ は $p$ を約数にもつ。

すると，$k$ と $k+1$ はともに素数 $p$ を約数にもつことになるが，これは $k$ と $k+1$ が互いに素であることと矛盾する。

よって，$a$ と $b$ をともに割り切る素数は存在しない。

## ［解 説］

$(k+1)-k=1$ から，$k$ と $k+1$ は互いに素です。昨年，東大・理系でも，この点に着目する問題が出されています。

**47**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[京都大・理]

整式 $x^n$ を整式 $x^2-2x-1$ で割った商を $q_n(x)$，余りを $a_nx+b_n$ とすると，

$$x^n=(x^2-2x-1)q_n(x)+a_nx+b_n \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，$a_n$ と $b_n$ は整数であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ でともに整数である。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k$ と $b_k$ がともに整数であると仮定し，①より，

$$x^k=(x^2-2x-1)q_k(x)+a_kx+b_k$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_kx^2+b_kx\\&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_k(x^2-2x-1)+a_k(2x+1)+b_kx\\&=(x^2-2x-1)\{xq_k(x)+a_k\}+(2a_k+b_k)x+a_k\end{aligned}$$

整式 $x^{k+1}$ を整式 $x^2-2x-1$ で割った余りは $a_{k+1}x+b_{k+1}$ より，

$$a_{k+1}=2a_k+b_k \cdots\cdots\cdots②,\quad b_{k+1}=a_k \cdots\cdots\cdots③$$

これより，$a_{k+1}$，$b_{k+1}$ はともに整数である。

(i)(ii)より，$a_n$ と $b_n$ は整数である。

次に，$a_n$ と $b_n$ をともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ で，ともに割り切る素数は存在しない。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k$ と $b_k$ をともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで，$a_{k+1}$，$b_{k+1}$ がともに素数 $p$ で割り切れるとすると，②③より，

$$a_k=b_{k+1},\quad b_k=a_{k+1}-2a_k=a_{k+1}-2b_{k+1}$$

これより，$a_k$，$b_k$ も素数 $p$ で割り切れ，仮定に反する。

よって，$a_{k+1}$ と $b_{k+1}$ をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より，$a_n$ と $b_n$ をともに割り切る素数は存在しない。

以上より，整式 $x^n$ を整式 $x^2-2x-1$ で割った余りを $ax+b$ とするとき，$a$ と $b$ は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しない。

## [解 説]

見かけは，本年の文系の類題ですが，内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

**48**　　[筑波大・理]

(1)　条件より，$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$ であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において，

$$a_{n+1}=-b_n-c_n,\ b_{n+1}=-c_n-a_n,\ c_{n+1}=-a_n-b_n$$

さて，$p_n=a_n+b_n+c_n$ とすると，$p_1=a+b+c$ であり，

$$p_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=-2(a_n+b_n+c_n)=-2p_n$$

よって，$p_n=p_1(-2)^{n-1}=(a+b+c)(-2)^{n-1}$ となり，第 $n$ 項までの和 $S_n$ は，

$$S_n=\frac{(a+b+c)\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=-b_n-c_n=a_n-p_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=a-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}\ \text{（}n=1\text{ のときも成立）}$$

同様にして，$b_n=b-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$，$c_n=c-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$，$T_n=\displaystyle\sum_{l=1}^{2n}q_l$ に対し，$a+b+c$ が奇数のとき，

すべての自然数 $n$ において $T_n$ は正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$T_1=q_1+q_2$ より，

$$\begin{aligned}T_1&=-(a_1)^2-(b_1)^2-(c_1)^2+(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2\\&=-a^2-b^2-c^2+(-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2\\&=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2\end{aligned}$$

よって，$T_1$ は正の奇数である。

(ii)　$n=k$ のとき　$T_k$ が正の奇数であると仮定すると，

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=T_k+q_{2k+1}+q_{2k+2}\\&=T_k-(a_{2k+1})^2-(b_{2k+1})^2-(c_{2k+1})^2+(a_{2k+2})^2+(b_{2k+2})^2+(c_{2k+2})^2\\&=T_k+(a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1})^2=T_k+(p_{2k+1})^2\end{aligned}$$

ここで，(1)から，$(p_{2k+1})^2=\{(a+b+c)(-2)^{2k}\}^2=(a+b+c)^2\cdot 16^k$ となり，$(p_{2k+1})^2$ は正の偶数であるので，$T_{k+1}$ は正の奇数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 $n$ において $T_n$ は正の奇数である。

## [解 説]

連立漸化式の基本的な問題です。ただ，出現する文字が多く，気疲れしてしまいます。(3)は，証明ですが，やや省略気味に記しています。

$\boxed{49}$ ［京都大・理］

$N \geqq 2$ より，$a_1 = 2^N - 3$ は奇数なので，$a_2 = \dfrac{a_1 - 1}{2} = \dfrac{2^N - 3 - 1}{2} = 2^{N-1} - 2$

$a_2$ は偶数となり，$a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$

すると，$N = 2$ のとき $a_3 = 0$ から $a_3$ は偶数となり，$a_4 = \dfrac{a_3}{2} = 0$，また $N \geqq 3$ のときは $a_3$ は奇数となり，$a_4 = \dfrac{a_3 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-2} - 1 - 1}{2} = 2^{N-3} - 1$

さらに，$2 \leqq N \leqq 3$ のとき $a_4 = 0$ から $a_4$ は偶数となり，$a_5 = \dfrac{a_4}{2} = 0$，また $N \geqq 4$ のときは $a_4$ は奇数となり，$a_5 = \dfrac{a_4 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-3} - 1 - 1}{2} = 2^{N-4} - 1$

以上より，$a_1 = 2^N - 3$，$a_2 = 2^{N-1} - 2$ で，$n \geqq 3$ のときは，帰納的に，$a_n$ を以下のようにまとめることができる。

(i)　$n \geqq N + 1$ のとき　$a_n = 0$

(ii)　$n \leqq N$ のとき　$a_n = 2^{N-n+1} - 1$

さて，$S_M = \displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n$ とおくと，$N \geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned} S_M \leqq S_N &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^{N} a_n \\ &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \cdots + (2^1 - 1) \\ &= \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N - 3 = 2^{N+1} - N - 5 \end{aligned}$$

また，$N = 2$ のときは，$a_1 = 2^2 - 3 = 1$，$a_2 = 2^1 - 2 = 0$，$n \geqq 3$ のとき $a_n = 0$ より，

$$S_M = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1 = 2^3 - 2 - 5 = 2^{N+1} - N - 5$$

したがって，どのような自然数 $M$ に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成立する。

［解 説］

$n$ が大きくなると $a_n$ は 0 になって，和は変わらないというような大雑把なとらえ方が必要です。ただ，文字がたくさん出るので，詰めの作業は気疲れします。

**50**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$T_m(1)={}_m\mathrm{C}_1\,S_1(1)+{}_m\mathrm{C}_2\,S_2(1)+{}_m\mathrm{C}_3\,S_3(1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_3+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}=(1+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m=2^m-2$$
$$T_m(2)={}_m\mathrm{C}_1\,S_1(2)+{}_m\mathrm{C}_2\,S_2(2)+{}_m\mathrm{C}_3\,S_3(2)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(2)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1\,(1+2^1)+{}_m\mathrm{C}_2\,(1+2^2)+{}_m\mathrm{C}_3\,(1+2^3)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,(1+2^{m-1})$$
$$=T_m(1)+\{(1+2)^m-{}_m\mathrm{C}_0\,2^0-{}_m\mathrm{C}_m\,2^m\}$$
$$=2^m-2+3^m-1-2^m=3^m-3$$

(2)　$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$T_m(l+1)={}_m\mathrm{C}_1\,S_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2\,S_2(l+1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,S_{m-1}(l+1)$$
$$={}_m\mathrm{C}_1\,\{1+2+\cdots+l+(l+1)\}+{}_m\mathrm{C}_2\,\{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}$$
$$+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,\{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}$$
$$=T_m(l)+{}_m\mathrm{C}_1\,(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2\,(l+1)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\,(l+1)^{m-1}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+\{(1+l+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0\,(l+1)^0-{}_m\mathrm{C}_m\,(l+1)^m\}$$
$$=(l+1)^m-(l+1)+(l+2)^m-1-(l+1)^m=(l+2)^m-(l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ ………(∗)

(3)　まず，$p=3$ のときは，$S_1(2)=1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は $p$ の倍数である。

次に，$p$ が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は $p$ の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)$

すると，(∗)から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$$2S_1(p-1)=p(p-1)$$

$p$ は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は $p$ の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l$　$(l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が $p$ の倍数であると仮定すると，条件より，

$$T_{l+2}(p-1)={}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)$$
$$+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}\,S_{l+1}(p-1)$$

(∗)から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$(l+2)S_{l+1}(p-1)=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)$$
$$-{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は $p$ の倍数となる。

すると，$p$ は 5 以上の素数で，$l+2 \leqq p-1$ から，$l+2$ と $p$ は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は $p$ の倍数である。

(i)(ii)より，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は $p$ の倍数である。

## ［解 説］

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l \leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。