$\boxed{28}$ ［東京大・理］

$\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \vec{0}$ を満たすとする。

(1)　$\angle \mathrm{APB}$，$\angle \mathrm{APC}$ を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

$\boxed{29}$　　［九州大・理］

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 BQ : QC，および線分 OP の長さを求めよ。

30　［一橋大］

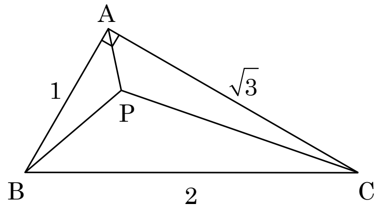
t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

$\boxed{28}$ ［東京大・理］

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$, $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおくと,



$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}$

両辺の大きさをとって, $\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}\right|$

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=1,\ \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\right|^2+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|^2=1,\ 1+\frac{2ab\cos\angle\mathrm{APB}}{ab}+1=1$$

よって, $\cos\angle\mathrm{APB}=-\dfrac{1}{2}$ より, $\angle\mathrm{APB}=120°$

また, ①より, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}$ とすると, 同様にして, $\angle\mathrm{APC}=120°$

(2) (1)より, $\angle\mathrm{BPC}=120°$ となり, $\triangle\mathrm{APB}$, $\triangle\mathrm{BPC}$, $\triangle\mathrm{CPA}$ に余弦定理を適用して,

$$a^2+b^2+ab=1\ \cdots\cdots②,\ b^2+c^2+bc=4\ \cdots\cdots③,\ c^2+a^2+ca=3\ \cdots\cdots④$$

②より, $(a-b)(a^2+b^2+ab)=a-b$, $a^3-b^3=a-b\ \cdots\cdots\cdots⑤$

③④より, 同様にすると,

$$b^3-c^3=4(b-c)\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ c^3-a^3=3(c-a)\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑥＋⑦より, $-2a+3b-c=0$, $c=-2a+3b\ \cdots\cdots\cdots⑧$

③－④より, $b^2-a^2+c(b-a)=1\ \cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より, $b^2-a^2+(-2a+3b)(b-a)=1$, $a^2+4b^2-5ab=1\ \cdots\cdots\cdots⑩$

②⑩より, $3b^2-6ab=0$, $b=2a\ \cdots\cdots\cdots⑪$

②に代入すると, $7a^2=1$ から, $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となり, ⑪⑧より,

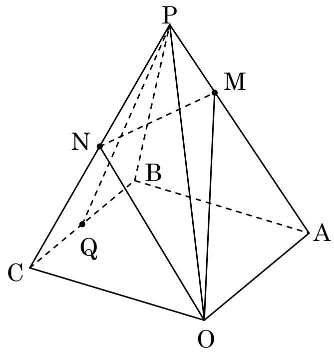
$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

以上より, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$, $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ である。

［解 説］

(2)は, 余弦定理から得られた連立方程式を解くという方針を立てました。ただ, あまりにも解きにくく, 頂点 A を原点とする座標系を設定しようかと心が揺らぎましたが, 敢えて初心を貫きました。

29　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］



条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$$

さて，点 M は辺 AP を$2:1$に内分する点，点 N は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，Q は線分 BC を$t:1-t$に分ける点とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

さて，直線 PQ が平面 OMN に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ となり，$\mathrm{OP}=k$ とおくと，

$$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$
$$(1-t)+2(1-t)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2k^2=0,\ \frac{3}{2}t+2k^2=\frac{9}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$

$$\frac{1}{4}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \frac{1}{4}t+k^2=\frac{5}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=-\frac{1}{4}$ となり，$1-t=\frac{5}{4}$ から，点 Q は BC を$1:5$に外分するので，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:5$$

また，$k^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{16}$ より，$\mathrm{OP}=k=\sqrt{\frac{21}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$

［解 説］

t の値が負になり計算間違いをしたかと思いましたが，問題をよく読むと，「直線 BC 上の点 Q」と記されていました。このため，上図の Q の位置は，結論とは異なります。

$\boxed{30}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ に対して，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{3}\end{aligned}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ となり，

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1=\frac{1}{9}\{(2t)^2+(2t)^2+t^2\}+1=t^2+1$$

すると，$(*)$から，点 P は中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ で半径 $r=\sqrt{t^2+1}$ の球面を描く。

このとき，OP の最大値は 3 なので，$\mathrm{OC}+r=3$ となり，$t>0$ から，

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{1}{3}t\right)^2}+\sqrt{t^2+1}=3\,,\ \sqrt{t^2+1}=3-t$$

$0<t<3$ のもとで両辺を 2 乗すると，$t^2+1=9-6t+t^2$ となり，$t=\dfrac{4}{3}$ である。

［解　説］

球面のベクトル方程式が題材です。成分計算を最初から行うのは，得策とはいえません。