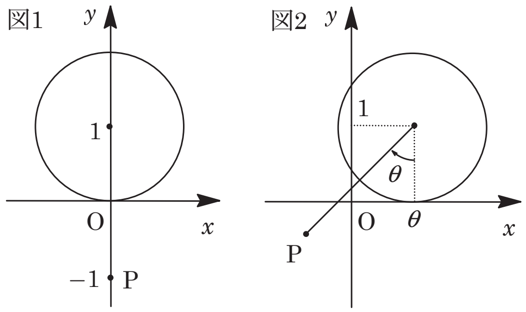
30　　［長崎大］

半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。



次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

31　　［東北大］

半径 1 の円を底面とする高さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と $45°$ の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1)　直径 AB と直交し，O との距離が t　$(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　V の体積を求めよ。

32　　［大阪大］

xyz 空間内の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

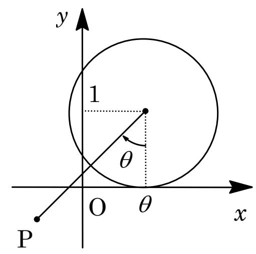
33　　［東京大］

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

$\boxed{30}$　［長崎大］



(1)　円がθだけ回転したとき，円の中心の座標は$(\theta,\ 1)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\theta,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)$$
$$=(\theta,\ 1)+2(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$とおくと，$x=\theta-2\sin\theta$，$y=1-2\cos\theta$

(2)　(1)より，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

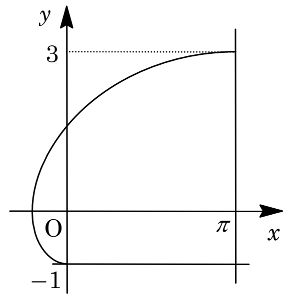
すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$の範囲で，xとyの増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$	
y	-1	↗	0	↗	3

これより，点Pが描く曲線C上にあって，x座標が最小となるのは点$\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

また，y座標が最小となるのは点$(0,\ -1)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

(3)　曲線Cと2直線$y=-1$および$x=\pi$によって囲まれた図形の面積Sは,



$$S=\int_{-1}^{3}(\pi-x)dy=\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta+2\sin\theta)2\sin\theta d\theta$$
$$=2\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta+4\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\theta$とおくと,

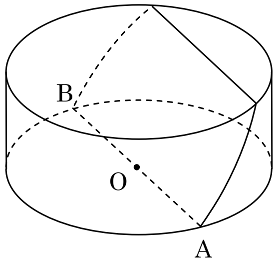
$$I_1=-\left[(\pi-\theta)\cos\theta\right]_0^{\pi}+\int_{0}^{\pi}(-\cos\theta)d\theta=\pi$$
$$I_2=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\pi$$

したがって，$S=2I_1+4I_2=4\pi$である。

［解 説］

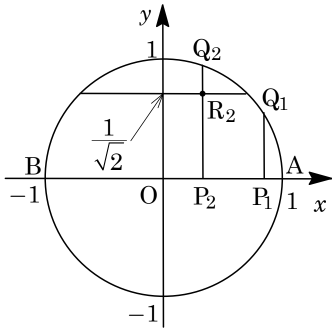
(3)では，曲線の概形を描き，y軸方向に積分という方針を立てました。そして，三角関数の周期性を利用して計算を行っています。なお，同じパラメータ曲線が，今年は千葉大・医，名大・理でも出題されました。

$\boxed{31}$ ［東北大］



(1)　半径 1 の円を底面とする高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と45°の角度をなす平面で切断したときできる部分のうち，体積の小さい方をVとする。

さて，点 O を原点，A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0) とおく。さらに，直径 AB 上に$0 \leqq t \leqq 1$として点$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$をとり，Pを通り AB と直交する平面で立体Vを切断する。



(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$ のとき

$\mathrm{P_1}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_1}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$ とおくと，切り口は，直角をはさむ辺の長さが$\mathrm{P_1Q_1} = \sqrt{1-t^2}$の直角二等辺三角形となり，その面積$S(t)$は，

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1-t^2)$$

(ii)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\mathrm{P_2}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_2}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$，$\mathrm{R_2}\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$とおくと，切り口は，上底の長さ$\mathrm{R_2Q_2} = \sqrt{1-t^2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，下底の長さ$\mathrm{P_2Q_2} = \sqrt{1-t^2}$，高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の台形となり，その面積$S(t)$は，

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$$

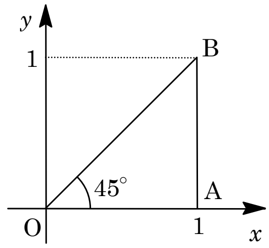
(2)　Vの体積をWとおくと，対称性より，

$$\begin{aligned}
W &= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right)dt + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{2}(1-t^2)\,dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(1-t^2)\,dt \\
&= \sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi - \frac{5}{12}\sqrt{2} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

［解　説］

教科書などでよく見かけるタイプですが，本問では，低い直円柱という「ひねり」が加わっています。

32　　［大阪大］



3 点O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐 V の側面上の任意の点を$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とすると,

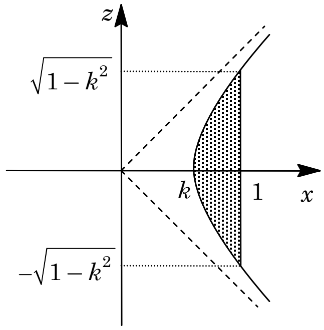
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 45^\circ$$

$$x=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$$x^2=y^2+z^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

この円錐 V を y 軸に垂直な平面 $y=k\quad(0\leqq k\leqq 1)$ で切断すると, その切り口は,

$$x^2=k^2+z^2,\ x^2-z^2=k^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$



そこで, この切り口を y 軸のまわりに 1 回転させると, その形状はドーナツ形になり, その外径を R, 内径を r とおくと,

$$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{1-k^2})^2}=\sqrt{2-k^2}\ ,\ r=k$$

すると, 切り口の面積$S(k)$は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(2-k^2-k^2)=2\pi(1-k^2)$$

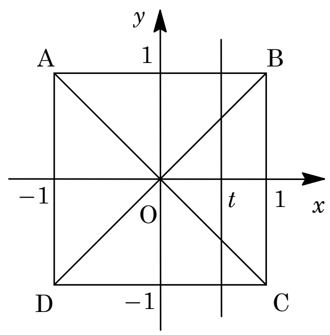
よって, 円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は, xz 平面に関する対称性から,

$$2\int_0^1 S(k)dk=4\pi\int_0^1(1-k^2)dk=4\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi$$

［解 説］

阪大頻出の立体の求積問題です。円錐の回転体が題材ですが, 内容は基本事項の組合せです。なお, 円錐面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

33　　［東京大］



(1)　正方形 S を直線 BD を軸として回転させてできる立体 V_1 は，中心 O で半径 $\sqrt{2}$ の円を底面とし，高さ $\sqrt{2}$ の直円錐を底面で 2 つ結合したものである。ここで，点 B を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos 45^\circ\quad (x+y\geqq 0)\cdots\cdots①$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ なので，①より，

$$-(x-1)-(y-1)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-x-y+2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

$-x-y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$2xy-4x-4y+4=-2x-2y+z^2+2$$

$$z^2-2xy+2x+2y-2=0\quad (0\geqq x+y\leqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

次に，点 D を頂点とする直円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|\cos 45^\circ\quad (x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

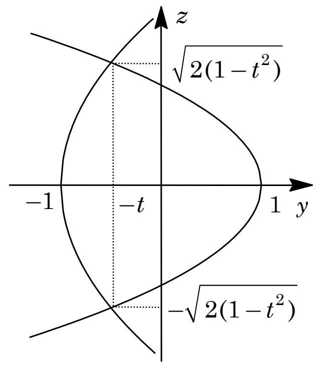
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(x+1,\ y+1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(1,\ 1,\ 0)$ なので，③より，同様にして，

$$x+y+2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+z^2}$$

$x+y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$z^2-2xy-2x-2y-2=0\quad (-2\leqq x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，平面 $x=t\ (0\leqq t<1)$ による V_1 の切り口を考える。



②より，$z^2-2ty+2t+2y-2=0\ (0\leqq t+y\leqq 2)$ から，

$$z^2=-(2-2t)(y-1)$$

$$y-1=-\frac{z^2}{2-2t}\quad (-t\leqq y\leqq 2-t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$z^2-2ty-2t-2y-2=0\ (-2\leqq t+y\leqq 0)$ から，

$$z^2=(2+2t)(y+1)$$

$$y+1=\frac{z^2}{2+2t}\quad (-2-t\leqq y\leqq -t)\cdots\cdots\cdots⑥$$

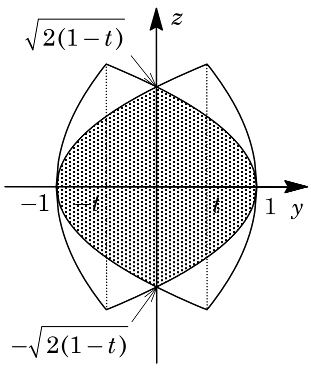
平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積 $S_1(t)$ は，対称性を考えて，

$$S_1(t)=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2-2t}\right)-\left(-1+\frac{z^2}{2+2t}\right)\right\}dz$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\Big[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\Big]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t^2)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t^2)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$$

(2)　立体をV_1と直線 AC を軸として回転させてできる立体V_2は xz 平面に関して対称となるので，V_1とV_2の共通部分を，平面$x=t$ $(0 \leqq t < 1)$ で切断した切り口は右図の網点部のようになる。



この面積を$S(t)$とすると，

$$S(t) = 4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}} \left\{1 - \frac{z^2}{2(1-t)}\right\} dz$$

$$= 4\left[z - \frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

V_1とV_2はyz平面について対称なので，この共通部分の体積Vは，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{9}\sqrt{2}$$

［解 説］

東大で頻出している立体の体積を求める問題です。ただ，今年のものは計算量がかなり多めとなっています。なお，円錐面の方程式については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。