11　　　　［筑波大］

楕円$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$の，直線$y=mx$と平行な2接線を$l_1$，$l_1{}'$とし，$l_1$，$l_1{}'$に直交する$C$の2接線を$l_2$，$l_2{}'$とする。

(1)　l_1，$l_1{}'$の方程式をmを用いて表せ。

(2)　l_1と$l_1{}'$の距離d_1およびl_2と$l_2{}'$の距離d_2をそれぞれmを用いて表せ。ただし，平行な2直線l，l'の距離とは，l上の1点と直線l'の距離である。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2$はmによらず一定であることを示せ。

(4)　l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$で囲まれる長方形の面積Sをd_1を用いて表せ。さらにmが変化するとき，Sの最大値を求めよ。

12 ［東京工大］

a, b を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

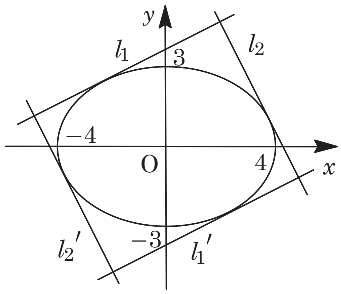
(1)　C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ。

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

11

［筑波大］



(1)　$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から，$9x^2+16y^2=9\cdot16$ ………①

直線 $y=mx$ に平行な直線を $y=mx+n$ ……②とおき，①に代入すると，

$$9x^2+16(mx+n)^2=9\cdot16$$

$$(9+16m^2)x^2+32mnx+16n^2-9\cdot16=0$$

①②が接することより，

$$D/4=16^2m^2n^2-(9+16m^2)(16n^2-9\cdot16)=0$$

$$16m^2n^2-(9+16m^2)(n^2-9)=0,\ n^2-9-16m^2=0$$

よって，$n=\pm\sqrt{16m^2+9}$ から，l_1，$l_1{}'$ の方程式は，$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2)　原点と l_1，$l_1{}'$ の距離はともに $\dfrac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$ なので，l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 は，

$$d_1=\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 は，$m\neq0$ のとき，③において m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換え，

$$d_2=\frac{2\sqrt{16\left(-\frac{1}{m}\right)^2+9}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}}=\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

なお，$m=0$ のときは $d_2=8$ となるが，このときも④は成立している。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2=\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1}+\dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1}=100$

(4)　l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S は，$S=d_1d_2=d_1\sqrt{100-(d_1)^2}$

ここで，$d_1=t$ とおくと，$6\leqq t<8$ となり，

$$S=t\sqrt{100-t^2}=\sqrt{100t^2-t^4}=\sqrt{-(t^2-50)^2+2500}$$

よって，$36\leqq t^2<64$ から，$t^2=50$ のとき S は最大値 $\sqrt{2500}=50$ をとる。

［解 説］

楕円の有名問題です。誘導が非常に細かく付いています。

12 ［東京工大］

(1) 円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ 上の任意の点を $(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおくと，C_1 が楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に内接する条件は，ある θ において等号が成り立ち，

$$(a+a\cos\theta)^2+\frac{a^2\sin^2\theta}{b^2}\leqq 1,\quad a^2b^2(1+\cos\theta)^2+a^2(1-\cos^2\theta)\leqq b^2 \cdots\cdots\cdots①$$

①を変形し，$a^2(b^2-1)\cos^2\theta+2a^2b^2\cos\theta+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0$

ここで，$t=\cos\theta$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ において，

$$a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0 \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，ある t $(-1\leqq t\leqq 1)$ で等号が成り立つ。

以下，$a>0$，$b>0$ のもとで，②が成り立つ条件を求める。
まず，$f(t)=a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2$ とおき，

(i)　$b>1$ のとき

$f(-1)=-b^2<0$ となるので，求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$

よって，$(4a^2-1)b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$b=1$ のとき

$f(t)=2a^2t+2a^2-1$ となり，求める条件は，$f(1)=4a^2-1=0$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

(iii)　$0<b<1$ のとき

$$f(t)=a^2(b^2-1)\left(t+\frac{b^2}{b^2-1}\right)^2-\frac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2$$

ここで，$-\dfrac{b^2}{b^2-1}=\dfrac{b^2}{1-b^2}>0$ に注意して，

(iii-i)　$0<-\dfrac{b^2}{b^2-1}\leqq 1$ $\left(0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき

求める条件は，$f\left(-\dfrac{b^2}{b^2-1}\right)=-\dfrac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2=0$ から，

$$-a^2b^4+(b^2-1)(a^2b^2+a^2-b^2)=0,\quad a^2+b^4-b^2=0$$

よって，$a=\sqrt{b^2-b^4}=b\sqrt{1-b^2}$

(iii-ii)　$-\dfrac{b^2}{b^2-1}>1$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<1\right)$ のとき

求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(i)～(iii)より，C_1 が C_2 に内接するための条件は，

$$a=b\sqrt{1-b^2}\ \left(0<b\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right),\quad a=\frac{1}{2}\left(b>\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)$$

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすので，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

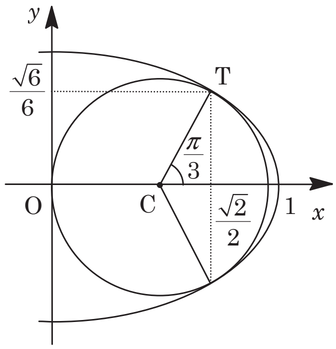
このとき，$f(t)=0$ の重解は，$t=-\dfrac{b^2}{b^2-1}=-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となり，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

すると，第 1 象限の接点の座標 $\mathrm{T}(p,\ q)$ は，

$$p=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad q=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(3)　(2)のとき，$C_1:\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{2}{9}$ となり，中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の円である。そして，半径 CT を x 軸の正の向きから測った角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。



また，$C_2:x^2+3y^2=1$ となり，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}$

すると，$x\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は，x 軸についての対称性を考えて，

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{1}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\end{aligned}$$

よって，$S=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{2}{27}\right)\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ となる。

[解　説]

円をパラメータ表示して，2 次不等式の処理に帰着させましたが，かなり時間がかかる問題です。なお，楕円をパラメータ表示した方が，数式処理は簡単だったようです。後から気づきましたが……。