19 ［岡山大］

xy 平面において，点 $(1,\ 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ。

(2) 点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2-ay=0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a\neq 0$ とする。

20　［東京工大］

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

21　　　　［東京大］

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

$\boxed{19}$ ［岡山大］

(1) 点$(1,\ 2)$を通る傾きtの直線lは，$y-2=t(x-1)$，$y=tx-t+2$ ………①

また，原点を通り，lに垂直な直線は，$x+ty=0$ ………②

①②を連立して，$x+t(tx-t+2)=0$，$(t^2+1)x=t^2-2t$

$$x=\frac{t^2-2t}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}-t+2=\frac{-t+2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，①②の交点Pの座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t^2-2t}{t^2+1},\ \dfrac{-t+2}{t^2+1}\right)$となる。

(2) ③④で表される点Pの軌跡と2次曲線$2x^2-ay=0$……⑤を連立して，

$$2\left(\frac{t^2-2t}{t^2+1}\right)^2-a\cdot\frac{-t+2}{t^2+1}=0,\quad 2t^2(t-2)^2+a(t-2)(t^2+1)=0$$

$$(t-2)\{2t^3-4t^2+a(t^2+1)\}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，点Pの軌跡と曲線⑤が3点のみを共有する条件は，⑥が異なる実数解を3つだけもつことに対応する。ここで，$2t^3-4t^2+a(t^2+1)=0$ ……⑦が解$t=2$をもつときは$a=0$となり不適となり，⑦が$t\neq 2$である実数解を2つだけもつ条件を求めると，

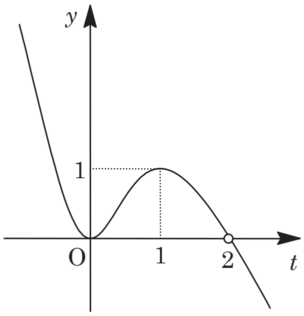
$$a=-\frac{2t^3-4t^2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	0	↗	1	↘

さて，$f(t)=-\dfrac{2t^3-4t^2}{t^2+1}$とおくと，

$$f'(t)=-\frac{(6t^2-8t)(t^2+1)-(2t^3-4t^2)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2t^4+6t^2-8t}{(t^2+1)^2}=-\frac{2t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$



$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=\infty$より，$y=f(t)$のグラフは右図のようになり，⑧が$t\neq 2$である2実数解をもつ条件は，$a=1$である。

このとき，⑦は，$2t^3-3t^2+1=0$，$(t-1)^2(2t+1)=0$となるので，⑥の実数解は，$t=2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}$となる。

すると，③④より，3つの共有点の座標は，$t=2$のとき$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$t=1$のとき$(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$t=-\dfrac{1}{2}$のとき$(x,\ y)=(1,\ 2)$である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，点Pの軌跡は，原点と点$(1,\ 2)$を直径の両端とする円(ただし点$(1,\ 0)$を除く)となり，tの値と点Pの位置は1対1に対応します。

20　　［東京工大］

$x>0$ において，$f(x)=e^x-x^e$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$$

ここで，$g_1(x)=e^{x-1}$，$g_2(x)=x^{e-1}$ とし，$F(x)=\log g_1(x)-\log g_2(x)$ とおくと，

$$F(x)=x-1-(e-1)\log x$$

$$F'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘		↗

すると，$F(x)$ の値の増減は右表のようになり，$F(1)=F(e)=0$ に注意すると，$1<e-1<e$ から，$0<x<1$ または $e<x$ のとき $F(x)>0$，$1<x<e$ のとき $F(x)<0$ となる。

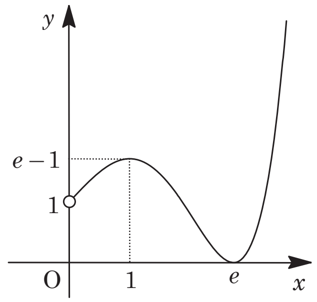
さらに，$f'(x)$ の符号と $F(x)$ の符号は一致することより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$e-1$	↘	0	↗

$$\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x^e)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\infty$$

これより，$x>0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数は，



$k<0$ のとき 0 個

$k=0$，$k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq 1$，$k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

［解 説］

微分の応用問題ですが，スムーズな処理を行うために，上の解答例では，対数をとりました。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ は，証明なしで利用しています。

21　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $g(x)=\sin x+ax$ を連立すると，$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ より，

$$\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a,\ \ \frac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a$$

さて，$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと，$x>0$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をちょうど 3 つもつ条件は，$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をちょうど 3 つもつ条件に等しい。

$$h'(x)=\frac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{x^2+2}{x^3}\cos x$$

ここで，n を 0 以上の整数とすると，$h'(x)=0$ の解は，$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$h\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{(-1)^n}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

すると，$h(x)$ の増減は下表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	∞	↘	$-\frac{2}{\pi}$	↗	$\frac{2}{3\pi}$	↘	$-\frac{2}{5\pi}$	↗	$\frac{2}{7\pi}$	↘

これから，$h(x)$ は n が偶数のとき負の極小値をもち，その値は n の値の増加に伴って増加する。また，n が奇数のとき正の極大値をもち，その値は n の値の増加に伴って減少する。

以上より，共有点をちょうど 3 つもつ条件は，

$$a=-\frac{2}{5\pi},\ \ \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}$$

［解 説］

定数分離によって，共有点の個数を調べるという頻出のタイプです。なお，解答例では $y=h(x)$ のグラフは記していませんが，下書きでは，しっかりと書いています。