28　　　　［新潟大］

微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

29 ［東京医歯大］

$m,\ n$ を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を m, n を用いて表せ。

(3)　$a,\ b,\ c$ を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i)　$g(0)=g(1)=0$

(ii)　$0<x<1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$

(4)　$m,\ n$ が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。

28　　　　［新潟大］

(1)　条件より，$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$ ………①

①に $y=0$ を代入すると，$f(x)f(0)-f(x)=0$ となり，

$$f(x)\{f(0)-1\}=0$$

ここで，$f(0)\neq 1$ とすると，任意の x に対して $f(x)=0$ となり①は成立しない。

よって，$f(0)=1$ である。

(2)　関数 $f(x)$ は微分可能なので，①の両辺を y で微分すると，

$$f(x)f'(y)-f'(x+y)\cdot 1=\sin x\cos y \text{ ………②}$$

②に $y=0$ を代入すると，$f(x)f'(0)-f'(x)=\sin x$

$f'(0)=0$ から，$f'(x)=-\sin x$

(3)　(2)から，C を定数として，$f(x)=\cos x+C$ となり，(1)より，

$$f(0)=1+C=1,\ C=0$$

よって，$f(x)=\cos x$ であり，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

［解 説］

関数方程式の頻出タイプの問題です。(2)は微分係数や導関数の定義を利用しても構いませんが，問題文に「$f(x)$ は微分可能」と書かれていますので，直接，①の両辺を微分しています。

29　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^m(1-x)^n$ に対し,

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-x^m\cdot n(1-x)^{n-1}$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-nx)$$
$$=-x^{m-1}(1-x)^{n-1}\{(m+n)x-m\}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右上表のようになり，その最大値は,

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n=\frac{m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}$$

(2)　$I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおくと,

$$I(m,\ n)=\frac{1}{m+1}\Big[x^{m+1}(1-x)^n\Big]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2)$$
$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}I(m+n-1,\ 1)$$

ここで，$I(m+n-1,\ 1)=\displaystyle\int_0^1 x^{m+n-1}(1-x)dx=\left[\frac{x^{m+n}}{m+n}-\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1$

$$=\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}=\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$$

よって，$I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}\cdot\dfrac{n-1}{m+2}\cdot\dfrac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{m+n-1}\cdot\dfrac{1}{(m+n)(m+n+1)}$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(3)　関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ に対し，条件(i)より，$g(0)=g(1)=0$ なので,

$g(x)=ax(x-1)$ ………①

また，条件(ii)より，$0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$ なので,

$$g(x)-f(x)=ax(x-1)-x^m(1-x)^n=-x(1-x)\{a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\}\geqq 0$$

よって，$a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq 0$，$x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq -a$ ………②

ここで，$h(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ とおくと,

(i)　$m-1\geqq 1$，$n-1\geqq 1$ $(m\geqq 2,\ n\geqq 2)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最大値は，(1)の結果を用いると,

$$\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m-1+n-1)^{m-1+n-1}}=\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$$

よって，②より，$-a\geqq\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$

(ii)　$m=1$，$n=1$ のとき

$h(x)=1$ となり，②より，$-a\geqq 1$

(iii)　$m=1$, $n \geqq 2$ のとき

$h(x)=(1-x)^{n-1}$ となり，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a \geqq 1$

(iv)　$m \geqq 2$, $n=1$ のとき

$h(x)=x^{m-1}$ となり，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a \geqq 1$

さて，$g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値 $M(a,\ b,\ c)$ は，②から $a<0$ として，

$$M(a,\ b,\ c)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a$$

以上より，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値は，$m \geqq 2$, $n \geqq 2$ のとき $\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$，

$m=1$ または $n=1$ のとき $\dfrac{1}{4}$ である。

(4)　(1)より，$f(x) \leqq \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ $\left(\text{等号は} x=\dfrac{m}{m+n} \text{のとき}\right)$ より，

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}dx,\quad \frac{m!n!}{(m+n+1)!} < \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

よって，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!} > \dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ ………③

また，(1)(3)から，$m>n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \leqq \dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} \geqq \frac{4(m+n-2)^{m+n-2}}{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}} \text{ ………④}$$

$J(m,\ n)=\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ とおくと，④より $J(m,\ n) \geqq 4J(m-1,\ n-1)$ となり，

$$J(m,\ n) \geqq 4^{n-1}J(m-n+1,\ 1)$$

ここで，$J(m-n+1,\ 1)=\dfrac{(m-n+2)^{m-n+2}}{(m-n+1)^{m-n+1}}=(m-n+2)\left(\dfrac{m-n+2}{m-n+1}\right)^{m-n+1}>2$

よって，$J(m,\ n)>2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$ ……⑤となり，③⑤から，

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!} > \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} > 2^{2n-1}$$

[解　説]

前半は有名問題ですが，後半はこの結果を誘導として利用するもので，実質的に 2 題分以上の分量があります。どこまで記述できるかが問われています。