16　　［東北大］

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\quad b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，eは自然対数の底とする。

(1)　一般項b_nを求めよ。

(2)　すべてのnについて，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

$\boxed{17}$ ［東京工大］

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ ［東北大］

(1) $b_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta=\Big[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{n}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$

(2) $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$であり，$e^{n\sin\theta}>0$から，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta\leqq e^{n\sin\theta}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の各辺を$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$から$\theta=\dfrac{\pi}{6}$まで積分すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n$となり，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$である。

(3) (1)(2)より，$nb_n\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$となり，$e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$から，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$n\to\infty$のとき，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{n}\log(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\to0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$

［解　説］

不等式を証明し，はさみうちの原理から極限へとつなぐ典型題です。

$\boxed{17}$ ［東京工大］

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の範囲は，$0 \leqq 4nx \leqq 2n\pi$ から，

$$2k\pi + x \leqq 4nx \leqq (2k+1)\pi - x \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すると，$2k\pi + x \leqq 4nx$ より，$x \geqq \dfrac{2\pi}{4n-1}k$

また，$4nx \leqq (2k+1)\pi - x$ より，$x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1}$

よって，$\dfrac{2\pi}{4n-1}k \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots(*)$

(*)の x の区間の長さを d_k，その総和を S_n とおくと，

$$d_k = \frac{2\pi}{4n+1}k + \frac{\pi}{4n+1} - \frac{2\pi}{4n-1}k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{2\pi}{4n+1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{\pi}{4n+1}n - \frac{2\pi}{4n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{n^2}{4n+1}\pi - \frac{n(n-1)}{4n-1}\pi = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\pi = \frac{1}{8}\pi$ となる。

［解 説］

最初は和積公式で変形しましたが，深みにはまりそうなので，不等式を満たす x の範囲を，$x \leqq 4nx \leqq \pi - x$，$2\pi + x \leqq 4nx \leqq 2\pi + \pi - x$，$4\pi + x \leqq 4nx \leqq 4\pi + \pi - x$，$\cdots$として求め，それをまとめたのが，上の解答例です。