$\boxed{36}$ ［岡山大・理］

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1 \geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{37}$ ［一橋大］

円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし, m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。

円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1) s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, P_1，P_2，P_3 を図示せよ。

(3) 正の整数 n について，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。

38　　［東京大・理］

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。

$\boxed{36}$ ［岡山大・理］

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと,

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより, すべての実数 y に対して $F\geqq 0$ が成立する条件は,

$$(1-a^2)x^2+2bx+1\geqq 0$$

さらに, $G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき, すべての実数 x に対して $G\geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0\ (a=\pm 1)$ のとき

$G=2bx+1$ より, 求める条件は $b=0$ である。

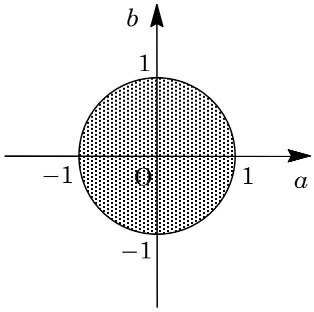
(ii)　$1-a^2\neq 0\ (a\neq\pm 1)$ のとき

$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より, 求める条件は,

$1-a^2>0$ ………①, $-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1\geqq 0$ ………②

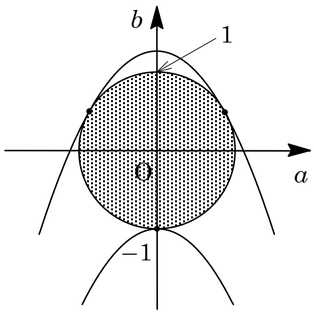
①②より, $a^2+b^2\leqq 1\ (-1<a<1)$

(i)(ii)より, 実数 a, b が満たすべき条件は, $a^2+b^2\leqq 1$ となり, 点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。



(2)　$a^2+b=k$ とおくと, $b=-a^2+k$ ………③

右図より, $(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき, k は最小値 -1 をとる。



また, 境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると,

$b=b^2-1+k$, $b^2-b-1+k=0$ ………④

共有点の b 座標が 1 つである条件は,

$D=1-4(-1+k)=0$, $k=\dfrac{5}{4}$

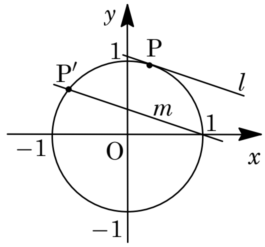
このとき, ④より $b=\dfrac{1}{2}$, ③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって, $(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

［解 説］

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず, x を固定し y を変化させたときの最小値を求め, 次にその最小値について, x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

37　　　　［一橋大］



(1)　円 $x^2+y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l と平行で，点 $(1,\ 0)$ を通る直線 m の方程式は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ より，

$$s(x-1)+ty=0 \quad\cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$t\neq 0$ のときは，②より $y=-\dfrac{s}{t}(x-1)$ となり，①に代入すると，

$$x^2+\frac{s^2}{t^2}(x-1)^2=1,\ t^2(x^2-1)+s^2(x-1)^2=0$$

$$(x-1)\{(s^2+t^2)x-(s^2-t^2)\}=0$$

$x\neq 1$ のとき，$x=\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ となり，$y=-\dfrac{s}{t}\left(\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}-1\right)=\dfrac{2st}{s^2+t^2}$

すると，$s^2+t^2=1$ から，$x=s^2-t^2$，$y=2st$ となり，$\mathrm{P}'(s',\ t')$ は，

$$s'=s^2-t^2,\ t'=2st \quad\cdots\cdots\text{③}$$

なお，$t=0$ のときは $s=\pm 1$ から，$(s',\ t')=(1,\ 0)$ となり条件を満たす。

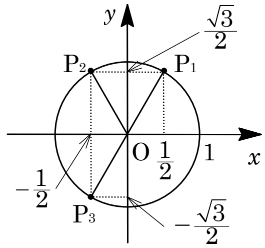
(2)　まず，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおくと，③より，

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\ t'=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$

点Pが $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，

$$\mathrm{P}_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\ \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\mathrm{P}_3\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$



よって，P_1，P_2，P_3 を図示すると，右図のようになる。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，(2)から $\mathrm{P}_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ となり，さらに $\mathrm{P}_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$，$\mathrm{P}_3(\cos 8\theta,\ \sin 8\theta)$ から，帰納的に $\mathrm{P}_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ と表すことができる。

ここで，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ のとき，k を整数として，$2^n\theta=\theta+2k\pi$ なので，

$$(2^n-1)\theta=2k\pi,\ \theta=\frac{2k\pi}{2^n-1}$$

すると，$0\leqq\dfrac{2k\pi}{2^n-1}<2\pi$ より，$0\leqq 2k\pi<2\pi(2^n-1)$，$0\leqq k<2^n-1$

よって，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-2$ から，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となる点Pは 2^n-1 個ある。

［解　説］

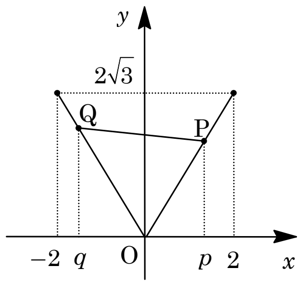
図形的な条件を三角関数の列へとつなぐ問題です。(3)は題意が把握しにくいので，$n=1,\ 2,\ \cdots$ と具体例を考え，方針を立てました。

38　　　　［東京大・理］

(1) 条件より，P$(p,\ \sqrt{3}p)$，Q$(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，OP＋OQ＝6 から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\ \cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$-2\leqq q\leqq 0$ より $-2\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $1\leqq p\leqq 2$ である。



ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

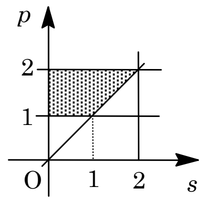
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，点$(s,\ t)$は直線②上にあるので，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots③$

ただし，$0\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$1\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i)　$0\leqq s\leqq 1$ のとき

右上図より，$1\leqq p\leqq 2$ となり，$\frac{3}{2}\leqq\frac{s+3}{2}\leqq 2$ から，

$$f(1)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii)　$1\leqq s\leqq 2$ のとき

右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$2\leqq\frac{s+3}{2}\leqq\frac{5}{2}$ から，

$$f(s)\leqq f(p)\leqq f(2),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

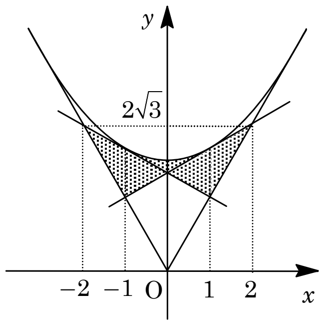
$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad(1\leqq s\leqq 2)$$

(2)　$-2\leqq s\leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(-1\leqq s\leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$と直線$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$は，それぞれ$s=1$，$s=-1$で接することに注意して点$(s,\ t)$を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる$p=\dfrac{s+3}{2}$も書き込んでおくのも，1 つの方法です。